Arkkitehtimatematiikan koe 20.5.2019

1. Anna kaikissa kohdissa vastaukset tarkkoina arvoina.

   a) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $x^2 - 5 = 0$? (1 p.)

   b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} = 3$? (1 p.)

   c) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $7 \cos x = 7$? (1 p.)

   d) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $|x^2 - 2| > 0$? (1 p.)

   e) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{1}{4} + \frac{x}{3} = 1$? (1 p.)

   f) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 1$? (1 p.)

Ratkaisu:

a) Yhtälö $x^2 - 5 = 0$ toteutuu jos ja vain jos yhtälö $x^2 = 5$ toteutuu. Tämä taas toteutuu jos ja vain jos x on $\sqrt{5}$ tai x on $-\sqrt{5}$.

Vastaus: Yhtälö $x^2 - 5 = 0$ toteutuu jos ja vain jos $x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$.

b) Huomataan, että

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot x}{6 \cdot 2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{12} = 3 \\ \Leftrightarrow &x = 3 \cdot 12 \Leftrightarrow x = 36, \end{aligned}$$

joten ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} = 3$, on $x = 36$.

Vastaus: Ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} = 3$, on $x = 36$.

c) Huomataan, että

$$7 \cos x = 7 \Leftrightarrow \cos x = \frac{7}{7} \Leftrightarrow \cos x = 1.$$

Tiedetään, että $\cos x = 1$ jos ja vain jos $x = n \cdot 2\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku. Näin ollen $7 \cos x = 7$ toteutuu, jos ja vain jos $x = n \cdot 2\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

Vastaus: $7 \cos x = 7$, jos ja vain jos $x = n \cdot 2\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

d) Huomataan, että $|x^2 - 2|$ on aina suurempi tai yhtä suuri kuin 0. Toisaalta,

$$\begin{aligned} &|x^2 - 2| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \\ \Leftrightarrow &x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}, \end{aligned}$$

joten $|x^2 - 2| > 0$ jos ja vain jos x ei ole $\sqrt{2}$ eikä $-\sqrt{2}$.

Vastaus: Kaikki muut reaaliluvut x, paitsi $x = \sqrt{2}$ ja $x = -\sqrt{2}$, toteuttavat epäyhtälön $|x^2 - 2| > 0$.

e) Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} + \frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} + \frac{4 \cdot x}{4 \cdot 3} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{12} + \frac{4 \cdot x}{12} = 1 \\
\Leftrightarrow &\frac{3 + 4x}{12} = 1 \Leftrightarrow 3 + 4x = 1 \cdot 12 \Leftrightarrow 3 + 4x = 12 \\
\Leftrightarrow &4x = 12 - 3 \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4},
\end{aligned}$$

joten ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{1}{4} + \frac{x}{3} = 1$, on $x = \frac{9}{4}$.

Vastaus: Ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{1}{4} + \frac{x}{3} = 1$, on $x = \frac{9}{4}$.

f) Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 5}{2 \cdot 4} = 1 \\
\Leftrightarrow &\frac{x \cdot 5}{8} = 1 \Leftrightarrow x \cdot 5 = 1 \cdot 8 \Leftrightarrow x \cdot 5 = 8 \\
\Leftrightarrow &x = \frac{8}{5},
\end{aligned}$$

joten ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 1$, on $x = \frac{8}{5}$.

Vastaus: Ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 1$, on $x = \frac{8}{5}$.

2. Tarkastellaan sellaista kuutiota, jonka särmän pituus on 6 cm. Kuution kaksi vastakkaista tahkoa maalataan punaisiksi ja kaksi muuta vastakkaista tahkoa maalataan sinisiksi. Toinen jäljelle jääneistä vielä maalaamattomista tahkoista maalataan mustaksi. Kuutio sahataan pienemmiksi 2 cm × 2 cm × 2 cm kuutioiksi.

   a) Kuinka monta pientä kuutiota saadaan yhteensä?

   (1 p.)

   b) Kuinka monta sellaista pientä kuutiota saadaan, joiden sivutahkoista tasan kolme on maalattu?

   (1 p.)

   c) Kuinka monta sellaista pientä kuutiota saadaan, joiden sivutahkoista tasan kaksi on maalattu?

   (1 p.)

   d) Kuinka monta sellaista pientä kuutiota saadaan, joiden sivutahkoista tasan yksi on maalattu?

   (1 p.)

e) Kuinka monta sellaista pientä kuutiota saadaan, joiden sivutahkoista ainakin yksi on maalattu?

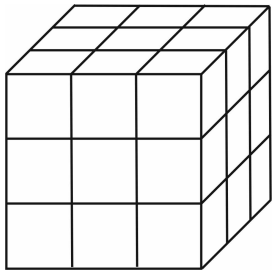
(1 p.)

f) Kuinka monta sellaista pientä kuutiota saadaan, joiden kaikki sivutahkot ovat maalaamattomia?

(1 p.)

Ratkaisu:

Piirretään tilannetta havainnollistava kuva:



a) Koska

$$\frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 3,$$

pieniä kuutioita saadaan yhteensä $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kappaletta.

Vastaus: Pieniä kuutioita saadaan yhteensä 27 kappaletta.

b) Ainoastaan pilkotun kuution kulmapalat voivat olla sellaisia, että niiden sivutahkoista tasan kolme on maalattu. Kulmapaloja on yhteensä kahdeksan kappaletta. Koska yksi ison kuution sivutahkoista on maalaamaton, näistä kulmapaloista neljä on sellaisia, joidan tahkoista vain kaksi on maalattu. Loput kulmapalat ovat sellaisia, joiden tahkoista kolme on maalattu. Näin ollen sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista tasan kolme on maalattu, on neljä kappaletta.

Vastaus: Sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista tasan kolme on maalattu, saadaan neljä kappaletta.

c) Ainoastaan pilkotun kuution kulmapalat ja reunapalat voivat olla sellaisia, että niiden sivutahkoista tasan kaksi on maalattu. Koska ison kuution tahkoista yksi on maalaamaton, kulmapaloista neljä kappaletta on sellaisia, joiden sivutahkoista on maalattu tasan kaksi. Ison kuution tahkoista viisi on maalattu ja yksi on maalaamaton. Kulmapalojen lisäksi vain pilkotun kuution (keskimmäiset) reunapalat, jotka vastaavat kahta ison kuution maalattua tahkoa, ovat sellaisia, joiden tahkoista tasan kaksi on maalattu. Tällaisia (keskimmäisiä) reunapaloja on yhteensä kahdeksan kappaletta. Näin ollen sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista tasan kaksi on maalattu, on yhteensä $4 + 8 = 12$ kappaletta.

Vastaus: Sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista tasan kaksi on maalattu, saadaan 12 kappaletta.

d) Ainoastaan pilkotun kuution ison kuution maalattuja tahkoja vastaavat keskipalat ja maalaamatonta tahkoa ja maalattua tahkoa vastaavat (keskimmäiset) reunapalat ovat sellaisia, että niiden sivutahkoista tasan yksi on maalattu. Maalattuja tahkoja vastaavia keskipaloja on yhteensä viisi kappaletta ja maalaamatonta tahkoa ja maalattua tahkoa vastaavia (keskimmäisiä) reunapaloja on yhteensä neljä kappaletta. Näin ollen sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista tasan yksi on maalattu, on yhteensä $5 + 4 = 9$ kappaletta.

Vastaus: Sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista tasan yksi on maalattu, saadaan yhdeksän kappaletta.

e) Edellisten kohtien nojalla sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista ainakin yksi on maalattu, on $4 + 12 + 9 = 25$ kappaletta.

Vastaus: Sellaisia pieniä kuutiota, joiden sivutahkoista ainakin yksi on maalattu, saadaan 25 kappaletta.

f) Vähennetään kaikkien pienten kuutioiden lukumäärästä sellaisten pienten kuutioiden lukumäärä, joiden sivutahkoista ainakin yksi on maalattu. Saadaan $27 - 25 = 2$. Näin ollen sellaisia pieniä kuutiota, joiden kaikki sivutahkot ovat maalaamattomia, on kaksi kappaletta.

Vastaus: Sellaisia pieniä kuutiota, joiden kaikki sivutahkot ovat maalaamattomia, saadaan 2 kappaletta.

3. Arkkitehtiopiskelija Pekkala haluaa maalata pihaterassinsa katoksen. Pekkalalla on yksi litra valkoista maalia ja yksi litra punaista maalia. Pekkala haluaa maalata katoksen maaliseoksella, jossa on 18 prosenttia punaista maalia ja 82 prosenttia valkoista maalia. Katoksen maalaamiseen tarvitaan yhteensä 6 desilitraa maaliseosta. Pekkala valmistaa maaliseosta tasan tarvittavan määrän eikä läikytä yhtään. Pekkala säästää jäljelle jäävän valkoisen maalin ja jäljelle jäävän punaisen maalin.

   a) Kuinka monta desilitraa punaista maalia jää säästöön? Anna vastauksen kaksidesimaalinen likiarvo. (3 p.)
   b) Pekkala valmistaa uudeen maaliseoksen. Uuteen seokseen Pekkala käyttää kaiken säästöön jääneen punaisen maalin, kaiken säästöön jääneen valkoisen maalin ja puoli desilitraa sinistä maalia. Kuinka monta prosenttia sinisen maalin osuus on uudesta maaliseoksesta? (3 p.)

Ratkaisu:

a) Maaliseokseen tarvitaan punaista maalia $0,18 \cdot 6$ dl $= 1,08$ dl. Punaista maalia jää säästöön 10 dl $- 1,08$ dl $= 8,92$ dl.

Vastaus: Punaista maalia jää säästöön $8,92$ dl.

b) Ensimmäiseen maaliseoksen tekemisen jälkeen punaista ja valkoista maaliseosta jää säästöön yhteensä 20 dl $- 6$ dl $= 14$ dl. Uuden maaliseoksen määrä on näin ollen 14 dl $+ 0,5$ dl $= 14,5$ dl. Sinisen maalin osuus uudesta maaliseoksesta on

$$\frac{0,5 \text{ dl}}{14,5 \text{ dl}} \approx 0,034483.$$

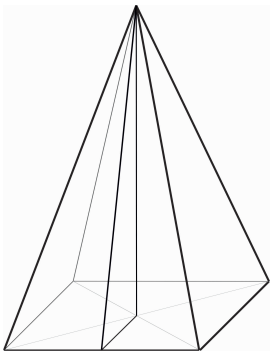
Sinisen maalin osuus uudesta maaliseoksesta on siis noin $3,4\%$.

Vastaus: Sinisen maalin osuus uudesta maaliseoksesta on noin $3,4\%$.

4. Kaisa rakentaa pyramidin, jonka pohja on neliö ja jonka sivutahkot ovat tasakylkisiä kolmioita. Jokaisen tasakylkisen kolmion korkeus on $h = 10$ ja pohjaneliön sivun pituus on $l = 3$. Piirrä kuva tehtävänannon mukaisesta pyramidista. Mikä on Kaisan rakentaman pyramidin korkeus ja tilavuus? Anna vastauksissa tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. (6 p.)

Ratkaisu:

Piirretään tilannetta havainnollistava kuva:



Merkitään tarkasteltavan pyramidin korkeutta kirjaimella k. Nyt, Pythagoraan lauseen nojalla

$$10^2 = k^2 + (\frac{1}{2} \cdot 3)^2 = k^2 + \frac{9}{4}.$$

Näin ollen pyramidin korkeus

$$k = \sqrt{10^2 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{391}{4}} \approx 9,8869.$$

Tarkasteltavan pyramidin tilavuus

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \sqrt{\frac{391}{4}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{391}{4}} \approx 29,6606.$$

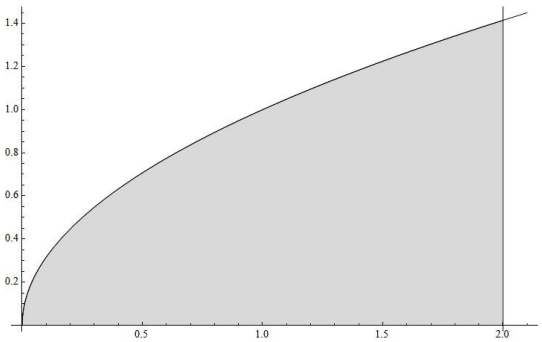
Vastaus: Kaisan rakentaman pyramidin korkeus on $\sqrt{\frac{391}{4}}$ ja tilavuus on $3 \cdot \sqrt{\frac{391}{4}}$. Korkeuden kaksidesimaalinen likiarvo on $9,89$ ja tilavuuden kaksidesimaalinen likiarvo on $29,66$.

5. a) Laske funktioiden $y = 0$, $x = 2$ ja $y = \sqrt{x}$ raajaaman alueen pinta-ala. Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. (3 p.)

   b) Laske funktioiden $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ ja $y = \sin x + 2$ raajaaman alueen pinta-ala. Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. (3 p.)

Ratkaisu:

a) Piirretään tilannetta havainnollistava kuva:

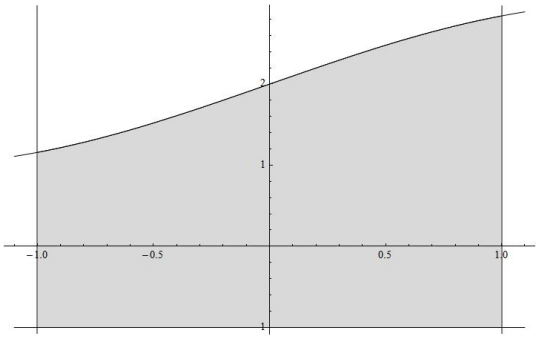


Kysytty pinta-ala (ks. kuva) on

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx = \Big/_0^2 \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot 0^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1,885618.$$

Vastaus: Kysytty pinta-ala on $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Sen kaksidesimaalinen likiarvo on $1,89$.

b) Piirretään tilannetta havainnollistava kuva:



Kysytty pinta-ala voidaan laskea x-akselin alapuolella olevan alueen ja x-akselin yläpuolella olevan alueen summana (ks. kuva). Näin ollen kysytty pinta-ala on

$$2\cdot 1 + \int_{-1}^{1} (\sin x + 2)\,dx = 2\cdot 1 + \int_{-1}^{1} \sin x\,dx + \int_{-1}^{1} 2\,dx.$$

Koska $\sin x$ on pariton funktio, niin $\int_{-1}^{1} \sin x\,dx = 0$. Näin ollen

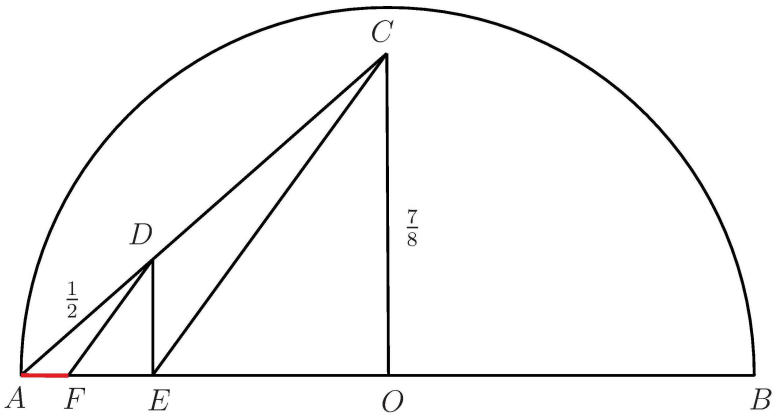
$$2\cdot 1 + \int_{-1}^{1} \sin x + 2\,dx = 2 + 0 + \int_{-1}^{1} 2\,dx = 2 + \int_{-1}^{1} 2\,dx = 2 + \Big/_{-1}^{1} 2x = 2 + 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 6.$$

Vastaus: Kysytty pinta-ala on 6. Sen kaksidesimaalinen likiarvo on $6,00$.

6. Tarkastellaan yksikköympyrää ja pisteitä A, B, C, D, E, F ja O. Jana pisteeestä A pisteeseen B on yksikköympyrän halkaisija. Tämän halkaisijan keskipiste on O. Jana pisteestä O pisteeseen C on kohtisuorassa halkaisijalle AB. Pisteen C etäisyys keskipisteestä O on $\frac{7}{8}$. Piste D on janalla AC etäisyydellä $\frac{1}{2}$ pisteestä A. Pisteet E ja F ovat halkaisijalla AB. Jana pisteestä D pisteeseen E on kohtisuorassa halkaisijalle AB. Jana FD on yhdensuuntainen janan EC kanssa. Piirrä tehtävänanoon mukainen kuva yksikköympyrästä ja pisteistä A, B, C, D, E, F ja O. Merkitse kuvaan janat AB, OC, AC, EC, ED ja FD. Mikä on janan AF pituus? Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. (6 p.)

Ratkaisu:

Piirretään tilannetta havainnollistava kuva:



Koska kolmiot AFD ja AEC ovat yhdenmuotoiset (kaksi samaa kulmaa), on $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC}$. Myös kolmiot AED ja AOC ovat yhdenmuotoiset (kaksi samaa kulmaa), joten $\frac{AE}{AD} = \frac{AO}{AC}$.

Koska lisäksi tiedetään, että $AD = \frac{1}{2}$ ja $AO = 1$, voidaan näin saaduista yhtälöistä johtaa

$$AF = AD \cdot \frac{AE}{AC} = AD \cdot \frac{AD \cdot AO}{AC^2} = \frac{AD^2}{AC^2} \cdot AO = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{AC^2}.$$

Pythagoraan lauseen perusteella $AC^2 = 1^2 + (\frac{7}{8})^2 = \frac{113}{64}$, joten

$$AF = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{113} = \frac{16}{113} \approx 0,14159.$$

Vastaus: Janan AF pituus on $\frac{16}{113}$. Pituuden kaksidesimaalinen likiarvo on $0,14$.

©2019 Aalto-yliopisto, LUT-yliopisto, Oulun yliopisto, Tampereen yliopisto, Turun yliopisto, Vaasan yliopisto, Åbo Akademi