Matematik | Uppgift 1.

Motivera dina svar i samtliga uppgifter.

a) En varas pris sänks 10 % och höjs sedan 10 %. Hur många procent är priset därefter av det ursprungliga? (1 p.)

b) Lös ekvationen $3x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 + 1)$. (1 p.)

c) Motivera att ekvationen $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ är sann för alla reella tal a och b. (1 p.)

d) Lös ekvationen $|x - 2| = 2x + 1$. (1 p.)

e) Lös ekvationen $(2^x)^2 - 3 \cdot 4^{x-1} = 2$. (1 p.)

f) Är det möjligt att $\cos\alpha \sin\alpha > 0$ inom intervallet $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$? Motivera. (1 p.)

Modellsvar:

a) Om varans pris ursprungligen är x, är det efter ändringarna $1{,}1 \cdot 0{,}9x = 0{,}99x$, alltså 99 % av det ursprungliga.

b)

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 + 1) \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 2x + 2 = 2x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & (a + b)^2 + (a - b)^2 \\ =\ & a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ =\ & 2a^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

d) Vi antar först att $x \geq 2$. Då antar ekvationen formen $x - 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$. Detta uppfyller dock inte kravet $x \geq 2$.

Därefter antar vi att $x < 2$. Då antar ekvationen formen $-x + 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Därmed är ekvationens enda lösning $x = \frac{1}{3}$.

e)

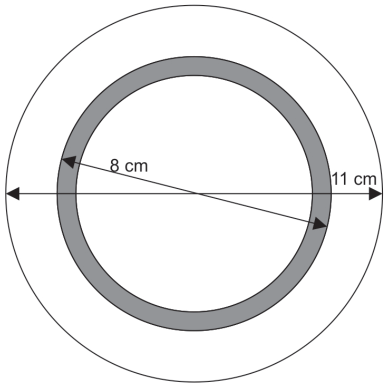
$$\begin{aligned} & (2^x)^2 - 3 \cdot 4^{x-1} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & 4^x - \frac{3}{4}4^x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4} \cdot 4^x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 4^x = 8 \\ \Leftrightarrow \quad & 2^{2x} = 2^3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

f) Då $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ gäller nödvändigtvis att $\sin \alpha \geq 0$ och $\cos \alpha \leq 0$. Således är $\cos \alpha \sin \alpha > 0$ inte möjligt.

Matematik | Uppgift 2.

Målartejp har tjockleken 0,1 mm och det säljs upprullat på en papprulle med diametern 8 cm. En full rulle har en yttre diameter på 11 cm.



a) Hur långt är det första varvet som upprullats på rullen? Hur långt är det andra varvet då? Varvets längd mäts från tejpets yttre yta.

(2 p.)

b) Hur många meter tejp finns det ungefär i en full rulle? Du kan anta att varje varv formar en perfekt cirkel. Motivera ditt svar. (4 p.)

Modellsvar 1:
Första varvets längd är $\pi \cdot (80 + 0,2)$ (mm), det andra varvets $\pi \cdot (80 + 0{,}4)$, det tredje varvets $\pi \cdot (80 + 0{,}6)$. Det n:te varvets längd i sin tur är $\pi(80 + n \cdot 0{,}2)$. Den totala längden blir således

$$\pi(80n + 0{,}2(1 + 2 + \cdots + n)) = \pi n(80 + 0{,}1(n + 1)),$$

då diametern är $80 + 0{,}2n$. Ur ekvationen $80 + 0{,}2n = 110$ får vi att totala antalet varv är $n = 150$, varvid man från uttrycket ovan erhåller tejpets längd som $\pi \cdot 150(80 + 0{,}1 \cdot 151) \approx 44814{,}8$ mm, dvs. knappt 45 meter.

Modellsvar 2:
Tejpets totallängd betecknas ℓ. Sett från sidan bildar det helt utdragna tejpet en lång rektangel vars yta är $0{,}1 \cdot \ell$. Denna yta är oförändrad då tejpet rullas ihop till en rulle med inre diametern 80 mm och yttre diametern 110 mm, dvs.

$$\pi \cdot 55^2 - \pi \cdot 40^2 = 1425\pi.$$

Från ekvationen $1425\pi = 0.1\ell$ erhålls $\ell \approx 44767,7$, dvs. knappt 45 meter.

Matematik | Uppgift 3.

a) Visa genom att beräkna att funktionen $f(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + e^x$ satisfierar ekvationen $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = e^x$. Både A och B är konstanter och $f''(x)$ betecknar derivatan av funktionen $f'(x)$. (3 p.)

b) Bestäm vilken funktion $f(x)$ satisfierar ekvationen $f(x) = 6x^2 + \int_0^2 f(x)\,dx$. (3 p.)

Modellsvar:

a) Genom att utnyttja deriveringsreglerna för produkter, sammansatta funktioner och exponentialfunktionen erhålls

$$f'(x) = Ae^{2x} \cdot 2 + B(e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2) + e^x$$

och vidare från detta

$$f''(x) = Ae^{2x} \cdot 4 + B(e^{2x} \cdot 2 + e^{2x} \cdot 2 + xe^{2x} \cdot 4) + e^x.$$

Påståendet kan bevisas stämma genom att man räknar summan

$$\begin{aligned} & f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) \\ = \; & 4Ae^{2x} + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} + e^x \\ - \; & 8Ae^{2x} - 4Be^{2x} - 8Bxe^{2x} - 4e^x \\ + \; & 4Ae^{2x} + 4Bxe^{2x} + 4e^x \\ = \; & e^x \end{aligned}$$

b) Vi betecknar $c = \int_0^2 f(x)\,dx$, varvid $f(x) = 6x^2 + c$. Då gäller

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (6x^2 + c)\,dx = \Big/_0^2 (2x^3 + cx) = 2 \cdot 2^3 + 2c.$$

Ur ekvationen $6x^2 + c = 6x^2 + 16 + 2c$ erhålls $c = -16$.

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Fysik | Uppgift 1.

1) B.

2) A.

3) B.

4)

Puckens kinetiska energi efter kollisionen är $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,160\mathrm{kg} \cdot (1,3\mathrm{m/s})^2 = 0,1352\mathrm{J}$.

Pucken bromsas upp av friktionskraften som utfört arbetet $W = -F_\mu \Delta s$.

Friktionskraftens belopp $F_\mu = \mu N = \mu m g$.

Farten i slutet är noll. Enligt arbetsprincipen är $\Delta K = W$, alltså gäller $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu m g \Delta s$. Ur detta fås den sökta sträckan:

$$\Delta s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{(1,3\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 0,050 \cdot 9,81\mathrm{m/s^2}} = 1,7227\mathrm{m} \approx 1,7\mathrm{m}.$$

Uppgiften kan även lösas utgående från Newtons andra lag.

Fysik | Uppgift 2.

1) C.

2) A.

3) D.

4) Energin som förflyttats till ackumulatorn fås genom att man integrerar strömmen ($\Delta Q = \int I dt$), vilket kan göras grafiskt genom att bestämma arean i Figur 1. Arean delas i två delar: en rektangel och den del som blir under den avtagande kurvan. En enskild ruta motsvarar laddningen $2\,\mathrm{A} \cdot 0,2\,\mathrm{h} = 0,4\,\mathrm{Ah}$.

Rektangeln består av 390 rutor, varvid en laddning på 156 Ah överförs under konstantströmsskedet.

Arean under den avtagande kurvan motsvarar ungefär 75 rutor (mer noggrant 74,7 st.), vilket motsvarar laddningen 30 Ah.

Totalt blir laddningen $156\mathrm{Ah} + 30\mathrm{Ah} = 186\mathrm{Ah}$ överförd till ackumulatorn.

Därmed lagras energin $E = QU = 186\mathrm{Ah} \cdot 420\mathrm{V} = 78120\mathrm{Wh} = 78\mathrm{kWh}$ i ackumulatorn.

Kemi │Uppgift 1

Rätta svar

1. B

2. B

3. C

4.

Substansmängden för järn och klorgas i början:

$$n(\mathrm{Fe, i\ början}) = \frac{m}{M} = \frac{3{,}00\ \mathrm{g}}{55{,}85\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 0{,}053715\ \mathrm{mol}$$

$$n(\mathrm{Cl_2, i\ början}) = \frac{pV}{RT} = \frac{101325\ \mathrm{Pa}\ \cdot 0{,}01\ \mathrm{m^3}}{8{,}31451\ \frac{\mathrm{Pa \cdot m^3}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot 295\ \mathrm{K}} = 0{,}41310\ \mathrm{mol}$$

Järn och klorgas reagerar med varandra enligt reaktionslikheten: $2\ Fe + 3\ Cl_2 \rightarrow 2\ FeCl_3$

Ur reaktionslikheten ser man att 2 mol Fe förbrukar 3 mol Cl_2, det vill säga:

$$n(\mathrm{Cl_2, förbrukat}) = \frac{3}{2} \cdot n(\mathrm{Fe, i\ början}) = \frac{3}{2} \cdot 0{,}053715\ \mathrm{mol} = 0{,}08057\ \mathrm{mol}$$

Substansmängden för klorgas i slutet av reaktionen:

$$n(\mathrm{Cl_2, i\ slutet}) = 0{,}41310\ \mathrm{mol} - 0{,}08057\ \mathrm{mol}\ =\ 0{,}33253\ \mathrm{mol} \approx \mathbf{0{,}333\ mol}$$

Trycket för klorgasen i slutet av reaktionen:

$$p(\mathrm{Cl_2, i\ slutet}) = \frac{nRT}{V} = \frac{0{,}33253\ \mathrm{mol}\ \cdot 8{,}31451 \frac{\mathrm{Pa \cdot m^3}}{\mathrm{mol \cdot K}} \cdot 325\ \mathrm{K}}{0{,}01\ \mathrm{m^3}} = 89856{,}68\ \mathrm{Pa} = \mathbf{89{,}9\ kPa}$$

Kemi │Uppgift 2.

Rätta svar

1. A

2. C

3. D

4.

a)

Karbamazepinhalten i provet som har analyserats med vätskekromatografiinstrument, beräknas med hjälp av kalibreringslinjens ekvation:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{y} + 0{,}4682}{20{,}795} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{64{,}2 + 0{,}4682}{20{,}795} = 3{,}1098\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$$

Koncentrationsfaktorn (1000 ml → 0,5 ml) beräknas på följande sätt:

$$\frac{1000}{0{,}5} = 2000$$

Karbatazepinhalten i ursprungliga avloppsvattenprovet är alltså:

$$\frac{3{,}1098\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}}{2000} = 0{,}001555\ \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}} \approx 1{,}55\ \frac{\mathrm{\mu g}}{\mathrm{l}}$$

b)

Först beräknas molmassan för karbamazepin ($C_{15}H_{12}N_2O$):

$$M = (15 \cdot 12{,}01 + 12 \cdot 1{,}008 + 2 \cdot 14{,}01 + 16{,}00)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 236{,}27\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Substansmängden för karbamazepin i en liter vatten (när halten är 0,021 mg/l):

$$n = \frac{m}{M} = \frac{0{,}021\ \mathrm{mg}}{236{,}27\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{mmol}}} = 8{,}888 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{mmol}$$

Volymen för vatten som innehåller en 1 mmol karbamazepin:

$$V = \frac{1\ \mathrm{mmol}}{8{,}888 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{mmol}} \cdot 1\ \mathrm{l} = 11250{,}76\ \mathrm{l} \approx 11250\ \mathrm{l}$$

Problemlösning | Uppgift 1.

1. [1 p] D.

2. [1 p] D.

3. [1 p] D.

4. [1 p] Arbetsförhållandet för lövnoderna 1–4 har definierats som intensiva. Vi beräknar sannolikheten att arbetet avbryts ofta för de här lövnoderna. Sannolikheten får man genom att ställa antalet ofta-svar för lövnoderna i relation till det totala antalet svar för lövnoderna.

Lövnod 1: $\frac{166}{15+62+166} = 0{,}68.$

Lövnod 2: $\frac{51}{5+13+51} = 0{,}74.$

Lövnod 3: $\frac{17}{1+4+17} = 0{,}77.$

Lövnod 4: $\frac{35}{8+15+35} = 0{,}60.$

Sannolikheten är störst i lövnod 3, dvs. då uppgifterna är under 14, antalet informationssystemen är under 13 och mötena är minst 17.

5. [1 p] När uppgifterna är högst 13 kommer man till någon av lövnoderna 2–7. Vi beräknar antalet sällan-svar för dessa lövnoder och sätter dem i relation till det totala antalet svar för samma lövnoder. Det får man enklast genom att räkna ut skillnaden mellan det totala antalet svar (794) och det totala antalet svar för lövnod 1. Dvs: $\frac{5+1+8+41+12+87}{794-15-62-166} = 0{,}28$. Sannolikheten är därmed 28 %.

6. [1 p] Om antalet uppgifter i utgångsläget är under 9, antalet informationssystemen under 13, antalet möten minst 4, men under 17 och antalet kolleger minst 11 är vi i lövnod 4, där det är ett intensivt arbetsförhållande.

Om antalet uppgifter ökar till minst 9, men förblir under 14, kommer man till lövnod 6, där det är ett lugnt arbetsförhållande.

Problemlösning | Uppgift 2.

1. [1 p] B.

2. [1 p] A.

3. [1 p] A.

4. [1 p] Med alla negativa reella tal.

5. [2 p]

input0 – neuron a: $w_0 = 0$
input1 – neuron a: $w_1 = 10$
input2 – neuron a: $w_2 = 0$
input0 – neuron b: $w_0 = 50$
input1 – neuron b: $w_1 = –10$
input2 – neuron b: $w_2 = 0$
input0 – neuron c: $w_0 = –2$
neuron a – neuron c: $w_1 = 2$
neuron b – neuron c: $w_2 = 2$.

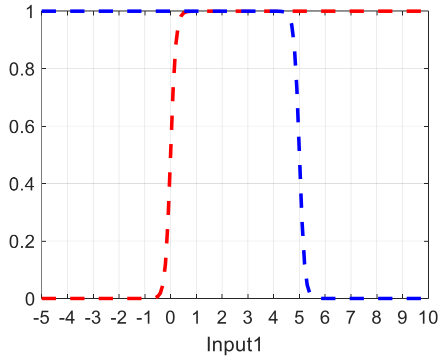
Tilläggsuppgifter om förklaringen till lösningen (krävs inte i uppgiftsbeskrivningen):

Funktionen *u*(*t*) kan man nå genom att förena en växande sigmoid och en avtagande sigmoid (se figur 5.1 och 5.2. nedan).

Värde för input2 är okänt, och det beror inte på *t*, så vi väljer 0 som värde på det första skiktets båda neuroners w_2-parametrar.

Vi planerar en växande sigmoid som får värdet 0,5 vid input1 = 0 och som är nära minimum (0) vid input1 = –0,5 och nära maximum (1) vid input1 = 0,5. Enligt figur 2 (den röda långstreckade linjen) är de passande viktkoefficient för en sådan sigmoid: $w_0 = 0$ ja $w_1 = 10$.

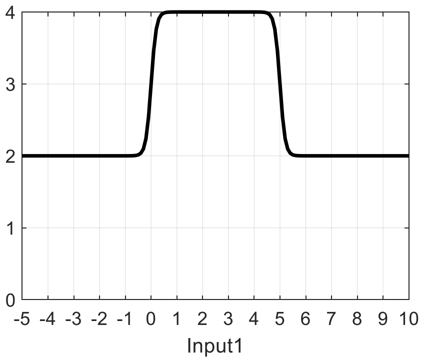
Vi planerar en avtagande sigmoid som får värdet 0,5 vid input1 = 5 och som är nära maximum vid input1 = 4,5 och nära minimum vid input1 = 5,5 genom att först definiera *x* i ekvationen $\text{output} = \frac{1}{1+e^{-x}} = 0{,}5$. Lösningen blir *x* = 0. Vi fortsätter med att definiera parametrarnas värden i ekvationen: $x = \text{input0} \cdot w_0 + \text{input1} \cdot w_1 + \text{input2} \cdot w_2$. Genom att placera de kända värdena i ekvationen får vi: $w_0 + 5 \cdot w_1 = 0$. Lösningen blir $w_0 = -5w_1$. För att få en avtagande sigmoid måste w_1:s värde vara negativt. Genom att tillämpa detta på exemplen i figur 2 får vi värdet: : $w_1 = –10$. Det betyder att $w_0 = -5w_1 = 50$.



Figur 5.1. Outputs från det nedre neuronskiktet som funktion av Input1.

Det övre skiktets lineära neuron beräknar den viktade summan för de ovanplanerade sigmoiderna (presenterade i figur 5.1) och lägger till konstanten w_0 i outputen. Vi sätter det nedre och det övre skiktets förenade parametervärden till $w_1 = 2$ och $w_2 = 2$. Då får vi sigmoiden att växa från noll till två kring input1 = 0. Den andra sigmoiden får vi istället att avta från två till noll kring input1 = 5.

Sigmoidernas viktade summa presenteras i figur 5.2. Genom att sätta $w_0 = -2$ fås neurala nätverkets output att flyttas vertikalt neråt och funktionen $u(t)$ uppnås.



Figur 5.2. Växande och avtagande sigmoidens viktade summa.