Valintakuulustelujen matematiikan koe 30.5.2006

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun.

A1. Millä parametrin p arvoilla yhtälöllä $x^2 - 2px + p^2 - 4p + 16 = 0$ on ratkaisu $x = 3$? Mikä on tällöin yhtälön toinen ratkaisu?

A2. Määritä funktion

$$f(x) = \sin^3 x - 3\sin x + \frac{28x}{11}$$

suurin ja pienin arvo välillä $[0, 7]$. (Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella.)

A3. Kolme kaverusta pelaa peliä, jossa pussista nostetaan sokkona valkoisia ja mustia kuulia. Pussissa on yksi valkoinen ja neljä mustaa kuulaa. Vuorossa oleva pelaaja nostaa yhden kuulan. Mikäli se on valkoinen, on nostaja voittanut; muutoin kuula palautetaan pussiin, ja vuoro siirtyy seuraavalle. Vuoro kiertää, kunnes valkoinen kuula on nostettu.

a) Millä todennäköisyydellä peli ratkeaa ennenkuin kukaan pelaajista on nostanut kaksi kertaa?

b) Olkoot pelaajat vuorojärjestyksessä A, B ja C. Mikä on kunkin pelaajan todennäköisyys voittaa peli?

(Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella.)

A4. Millä vakion k, $k < 2$, arvoilla on voimassa

$$\int_k^2 |2x+3|\, dx = \left| \int_k^2 (2x+3) dx \right| \quad ?$$

A5. Päättämätön mittarimato Mauri kulkee edestakaisin pitkin oksaa, jonka pituus on 1. Aina käännyttyään kohti oksan kärkeä se kulkee 80 % kääntymispisteen ja oksan kärjen välisestä matkasta ja kääntyy sitten takaisin kulkemaan kohti oksan tyveä. Oksan tyveä kohti kulkiessaan Mauri aina malttaa kulkea 60 % kääntymispisteen ja tyven välisestä matkasta, minkä jälkeen se jälleen kääntyy kulkemaan kohti oksan kärkeä.

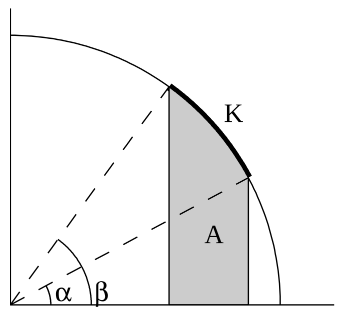
Erään kerran, kun Mauri kääntyy kulkemaan kohti oksan kärkeä, Maurin etäisyys oksan tyvestä on x_0. Kun Mauri tämän jälkeen n:nnen kerran kääntyy kulkemaan kohti oksan kärkeä, Maurin etäisyys oksan tyvestä on x_n, $n > 0$.

a) Määritä etäisyyden x_n lauseke etäisyyden x_{n-1} funktiona.

b) Määritä etäisyyden x_n lauseke etäisyyden x_0 funktiona.

c) Mikä on x_0, kun tiedetään, että kääntyminen tiettyyn suuntaan tapahtuu aina samassa pisteessä? (Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.)

A6. Origokeskisen yksikköympyrän kaari K sijaitsee xy-tason 1. neljänneksessä. Origosta kaaren K päätepisteisiin piirretyt janat muodostavat positiivisen x-akselin kanssa kulmat α ja β, missä $0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2}$. Olkoon A kaaren K ja x-akselin väliin jäävä alue kuten kuvassa 1. Vastaavasti, olkoon B kaaren K ja y-akselin väliin jäävä alue. Osoita, että alueiden A ja B pinta-alojen summa on lukuarvoltaan yhtä suuri kuin kaaren K pituus.



Kuva 1

Liite: kaavakokoelma

INSMAT 2006 **tehtävä 1** sarja A	sarja B	sarja C	sarja D	alustava pisteytys
Välttämätön ja riittävä ehto parametrille p on, että p toteuttaa yhtälön, joka saadaan sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön $x = 3$, siis	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$	
$9 - 6p + p^2 - 4p + 16 = 0$				
eli $p^2 - 10p + 25 = 0$,	$p^2 - 12p + 36 = 0$	$p^2 - 12p + 36 = 0$	$p^2 - 14p + 49 = 0$	
jonka ainoa ratkaisu on				
$\mathbf{p = 5}$	$\mathbf{p = 6}$	$\mathbf{p = 6}$	$\mathbf{p = 7}$	3p
(kaksoisjuuri).				
Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön $p = 5$ saadaan yhtälö				1p
$x^2 - 10x + 21 = 0$,	$x^2 - 12x + 32 = 0$,	$x^2 - 12x + 35 = 0$,	$x^2 - 14x + 48 = 0$,	
jonka ratkaisut ovat $x_1 = 3$ (annettu) ja				
$\mathbf{x_2 = 7}$.	$\mathbf{x_2 = 8}$	$\mathbf{x_2 = 7}$	$\mathbf{x_2 = 8}$	2p

INSMAT 2006 **tehtävä 2** sarja A	sarja B	sarja C	sarja D	alustava pisteytys
Funktio f on kaikkialla derivoituva; mahdollisia ääriarvokohtia voivat siis olla ainoastaan f:n derivaatan 0-kohdat ja tarkasteluvälin päätepisteet.				
$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x - 3\cos x + 28/11 =$ $= 3(\sin^2 x - 1)\cos x + 28/11 =$ $= -3\cos^3 x + 28/11$	$f'(x) =$ $-3\cos^3 x + 11/7$	$f'(x) =$ $-3\cos^3 x + 23/9$	$f'(x) =$ $-3\cos^3 x + 14/9$	
(sillä $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$). Siis piste x on f':n 0-kohta jos ja vain jos				
$\cos^3 x = \frac{28}{33} \Leftrightarrow \cos x = \sqrt[3]{\frac{28}{33}} = 0.9467...$	$\cos x = 0.8061...$	$\cos x = 0.9479...$	$\cos x = 0.8033...$	3p
Tämän yhtälön ratkaisut ovat $x_0 = 0.3279...$ (laskimesta) ja lisäksi pisteet $2n\pi \pm x_0$, missä n on kokonaisluku.	$x_0 = 0.6332...$	$x_0 = 0.3240...$	$x_0 = 0.6378...$	2p
Väliillä [0,7] sijaitsevat ratkaisut ovat x_0:n lisäksi $x_1 = 2\pi - x_0 = 5.9552...$ sekä $x_2 = 2\pi + x_0 = 6.6111...$.	$x_1 = 5.6499...$ $x_2 = 6.9164...$	$x_1 = 5.9591...$ $x_2 = 6.6072...$	$x_1 = 5.6453...$ $x_2 = 6.9210...$	
Laskemalla funktion arvot $f(0)$, $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ ja $f(7)$ todetaan, että **pienin** on $\mathbf{f(x_0) \approx -0.098}$ ja **suurin** on $\mathbf{f(7) \approx 16.131}$	$\mathbf{f(x_0) = -0.573}$ $\mathbf{f(8) = 10.572}$	$\mathbf{f(x_0) = -0.095}$ $\mathbf{f(7) = 16.202}$	$\mathbf{f(x_0) = -0.583}$ $\mathbf{f(8) = 10.445}$	1p

INSMAT 2006 **tehtävä 3**

alustava pisteytys

a) Todennäköisyys, että vuorossa oleva pelaaja nostaa mustan kuulan, on $\frac{4}{5} = 0{,}8$.

Todennäköisyys, että kolmella ensimmäisellä nostolla saadaan musta, on silloin $0{,}8^3$.
Kysytty todennäköisyys, joka on tapahtuman ”kolmella ensimmäisellä musta” komplementti-tapahtuman todennäköisyys, on siis

$$1 - 0{,}8^3 = \mathbf{0{,}488} \ .$$

2p

b) Merkitään tapahtumia A = ”pelaaja A voittaa” jne.
Jos pelaaja A nostaa ensimmäisellä kerralla mustan (todennäköisyys = 0,8), siirtyy vuoro pelaajalle B , joka on nyt aivan samassa tilanteessa kuin A oli pelin alussa. Näin ollen on oltava $P(B) = 0{,}8\,P(A)$.

Vastaavasti, jos sekä A että B ensimmäisillä yrityksillään ovat nostaneet mustat (todennäköisyys = $= 0{,}8^2$), on C:n voittotodenäköisyys sama kuin oli A:n voittotodenäköisyys pelin alkaessa (eli P(A)), joten C:n voittotodennäköisyys pelin alkaessa on $P(C) = 0{,}8^2\,P(A)$.

2p

Koska joku (ja vain yksi) pelaajista lopulta varmasti voittaa, on $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ eli $(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2)\,P(A) = 1$.

Saadaan $P(A) = \frac{1}{2{,}44} \approx \mathbf{0{,}410}$, mistä edelleen $P(B) \approx \mathbf{0{,}328}$ ja $P(C) \approx \mathbf{0{,}262}$.

2p

Huom: Todennäköisyydet voidaan laskea myös geometristen sarjojen avulla; esim.

$$P(A) = P(\text{valkea}) + P(\text{3 mustaa, sitten valkea}) + P(\text{6 mustaa, sitten valkea}) + \ldots =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}8^3\,0{,}2 + 0{,}8^6\,0{,}2 + \ldots = 0{,}2 \cdot \frac{1}{1-0{,}8^3} \approx 0{,}410 \quad \text{jne.}$$

INSMAT 2006 **tehtävä 4** sarja A	sarja B	sarja C	sarja D	alustava pisteytys
Jos kaikissa integrointivälin pisteissä x (ts. kun $k \le x \le 2$) pätee $2x+3 \ge 0$, on yhtälö voimassa, koska tällöin voidaan suoraan poistaa itseisarvomerkit molemmilta puolilta. Selvästi näin on, jos $2k+3 \ge 0$ eli $k \ge -3/2$.	$k \ge -5/2$	$k \ge -7/2$	$k \ge -9/2$	1p
Tapauksessa $k < -3/2$ saadaan : vasen puoli = $= \int_k^2 \lvert 2x+3 \rvert dx = \int_k^{-3/2} -(2x+3)dx + \int_{-3/2}^2 (2x+3)dx = ... = k^2 + 3k + 29/2$,	$k^2 + 5k + 53/2$	$k^2 + 7k + 85/2$	$k^2 + 9k + 125/2$	
oikea puoli = $\left\lvert \int_k^2 (2x+3)dx \right\rvert = \lvert 10 - 3k - k^2 \rvert$.	$\lvert 14 - 5k - k^2 \rvert$	$\lvert 18 - 7k - k^2 \rvert$	$\lvert 22 - 9k - k^2 \rvert$	2p
On siis löydettävä ne k:n arvot ($k < -3/2$), joilla joko a) $k^2 + 3k + 29/2 = 10 - 3k - k^2$ tai b) $k^2 + 3k + 29/2 = -(10 - 3k - k^2)$.				1p
Vaihtoehto a) antaa $2k^2 + 6k + 9/2 = 0$ eli $k = -3/2$, joka ei toteuta ehtoa $k < -3/2$.	$k = -5/2$	$k = -7/2$	$k = -9/2$	
Vaihtoehto b) ei voi toteutua millään k:n arvolla, koska b):n yhtälö johtaa ristiriitaan $29/2 = -10$.	$53/2 = -14$	$85/2 = -18$	$125/2 = -22$	
Siis tapauksessa $k < -3/2$ ei saada uusia ratkaisuja, joten tehtävän ehdon toteuttavat ne ja vain ne vakiot k , joilla $\mathbf{-3/2 \le k < 2}$.	$\mathbf{-5/2 \le k < 2}$	$\mathbf{-7/2 \le k < 2}$	$\mathbf{-9/2 \le k < 2}$	2p

<table>
<tr><th>INSMAT 2006 tehtävä 5 sarjat A ja C</th><th>sarjat B ja D</th><th>alustava pisteytys</th></tr>
<tr><td>

Käytetään oksan pisteen koordinaattina etäisyyttä oksan tyvestä, jolloin siis esim. tyven koordinaatti on $x = 0$ ja oksan kärjen koordinaatti on $x = 1$ jne.

a) Mauri (Mats) siis lähtee pisteestä x_{n-1} taivaltamaan kohti pistettä 1 , mutta kääntyykin eräässä pisteessä, sanokaamme pisteessä y , takaisin kohti pistettä 0 ja kulkee pisteeseen x_n asti (ja kääntyy sitten taas).
Tehtävänannon mukaan $y - x_{n-1} = 0{,}8(1 - x_{n-1})$ eli $y = 0{,}8 + 0{,}2\,x_{n-1}$.
Edelleen $y - x_n = 0{,}6(y - 0)$ eli $x_n = 0{,}4\,y$.

Saadaan $x_n = 0{,}4\,(0{,}8 + 0{,}2\,x_{n-1})$ eli $\mathbf{x_n = 0{,}32 + 0{,}08\,x_{n-1}}$.

b) Edellisen nojalla
$x_1 = 0{,}32 + 0{,}08\,x_0$,
$x_2 = 0{,}32 + 0{,}08\,x_1 = 0{,}32 + 0{,}08\,(0{,}32 + 0{,}08\,x_0) = 0{,}32\,(1 + 0{,}08) + 0{,}08^2\,x_0$,
$x_3 = 0{,}32 + 0{,}08\,x_2 = \ldots = 0{,}32\,(1 + 0{,}08 + 0{,}08^2) + 0{,}08^3\,x_0$
jne.

Selvästi yleinen lauseke on $\mathbf{x_n = 0{,}32\,(1 + 0{,}08 + 0{,}08^2 + \ldots + 0{,}08^{n-1}) + 0{,}08^n\,x_0}$, joka voidaan geometrisen summan kaavan avulla vielä sieventää muotoon

$$x_n = \frac{0{,}32(1 - 0{,}08^n)}{0{,}92} + 0{,}08^n\,x_0 .$$

c) Jotta olisi $x_n = x_{n-1}$ kaikilla n , on välttämätöntä ja riittävää, että $x_1 = x_0$.
Kohdan a) nojalla saadaan $0{,}32 + 0{,}08\,x_0 = x_0$, mistä

$$\mathbf{x_0} = \frac{0{,}32}{0{,}92} \approx \mathbf{0{,}35}$$

Tällöin myös kääntymiset oksan kärkipäässä tapahtuvat aina samassa pisteessä.

</td><td>

$y - x_{n-1} = 0{,}8(1 - x_{n-1})$
$y - x_n = 0{,}7(y - 0)$ eli $x_n = 0{,}3\,y$
$\mathbf{x_n = 0{,}24 + 0{,}06\,x_{n-1}}$

$\mathbf{x_n = 0{,}24\,(1 + 0{,}06 + \ldots + 0{,}06^{n-1}) + 0{,}08^n\,x_0}$

$$\mathbf{x_0} = \frac{0{,}24}{0{,}94} \approx \mathbf{0{,}26}$$

</td><td>

2p

2p

2p

</td></tr>
</table>

INSMAT 2006 **tehtävä 6**	alustava pisteytys
Koska kyseessä on 1-säteinen ympyrä, kaaren K pituus on suoraan $\beta - \alpha$. Viitaten tehtäväpaperin kuvioon: Alue A sijaitsee ympyräsektorissa, jonka ala on $\frac{\beta}{2\pi}\cdot\pi = \frac{\beta}{2}$ (huom. että yksikköympyrän ala = π). A:n vasemmalla puolella sijatsevan kolmion ala = $\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$. Siis sen segmentin puolikkaan (sektori – kolmio), johon A sisältyy, ala on $\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$. Alueen A ala saadaan vähentämällä tästä A:n oikealla puolella sijaitsevan segmentin puolikkaan ala, joka riippuu kulmasta α samoin kuin yllä laskettu ala riippuu kulmasta β . Siis A:n pinta-ala = $\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta - (\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{2} - \frac{1}{2}(\cos\beta\sin\beta - \cos\alpha\sin\alpha)$. Alueen B ala lasketaan samalla tavalla kulmien $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ja $\frac{\pi}{2} - \beta$ funktiona. Koska $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ jne., alueen B alaksi saadaan $\frac{\beta-\alpha}{2} - \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta)$. Summaamalla A:n ala + B:n ala saadaan $\frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} = \beta - \alpha$, kuten pitikin.	1p 3p 2p