Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

Liite: Kaavakokoelma.

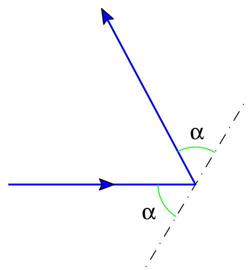
A1 Kokonaistuotanto jaetaan materian ja palveluiden tuotantoon. Verrataan tuotantoa tammikuussa 2008 tammikuuhun 2009. Tänä vuoden pituisen tarkastelujakson aikana materiatuotanto kasvoi 2,0% ja palvelutuotanto laski 7,0%.

Kuinka suuri oli materiatuotannon osuus kokonaistuotannosta tammikuussa 2009,

(a) kun tammikuussa 2008 materia- ja palvelutuotanto olivat yhtäsuuret?
(b) kun vertailuaikana kokonaistuotanto laski 2,0%?

Anna kummatkin vastaukset $0,1\%$-yksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

A2 Valonsäde kulkee x-akselia pitkin positiiviseen suuntaan. Säde heijastuu suorasta $y = k(x-3)$, $k \neq 0$. Säde kulkee suoraan, paitsi heijastuessaan; heijastuessa tulo- ja lähtökulma ovat yhtäsuuret (vertaa kuva).



(a) Millä k:n arvoilla heijastunut valonsäde leikkaa y-akselin?
(b) Missä pisteessä, jos missään, heijastunut valonsäde leikkaa y-akselin, kun $k = 2$?

Anna a-kohdassa tarkka vastaus ja b-kohdassa likiarvo neljällä desimaalilla.

A3 Määrää käyrien

$$y = x^3 - ax \qquad \text{ja} \qquad y = (a-1)x^2$$

rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala,

(a) kun $a = 0$.
(b) kun $a > 0$.

A4 Merkitään $f(t)$:llä erään aineen pitoisuutta näytteessä ajan hetkellä $t > 0$. Oletetaan, että pitoisuus vaihtelee mallin $f(t) = a\,t^b$ mukaan, missä a ja b ovat tuntemattomia ajasta riippumattomia vakioita. Mikä on oletetun mallin mukaan aineen pitoisuus hetkellä $t = 3$, kun tiedetään pitoisuudet $f(2) = 7$ ja $f(5) = 3$?

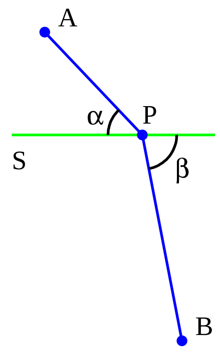
Anna vastuksena pitoisuuden tarkka arvo ja sen likiarvo kolmen desimaalin tarkkuuteen pyöristettynä.

A5 Tarkastellaan lukujonoa

$$a_n = n^{2010}/e^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Monesko lukujonon jäsen on suurin, vai onko suurinta ollenkaan? Perustele väitteesi täsmällisesti.

A6 Tarkastellaan kuvan mukaista tilannetta. Suora S edustaa rantaviivaa, joka olkoon koordinaatiston x-akselilla. Pisteessä $A = (0, a)$ oleva uimavalvoja havaitsee pisteessä $B = (c, -b)$ hädässä olevan uimarin ($a, b, c > 0$). Uimavalvoja juoksee vauhdilla v_1 suoraan rannalle pisteeseen P ja ui sieltä suoraan vauhdilla v_2 hukkuvan luo.



Perustele, miksi nopeimmalla mahdollisella reitillä on

$$\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2}.$$

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare.

Bilaga: Formelsamling.

A1 Den totala produktionen uppdelas i materialproduktion och serviceproduktion. Produktionen under januari 2008 jämförs med den under januari 2009. Under denna ett år långa period hade materialproduktionen ökat med 2,0% och serviceproduktionen minskat med 7,0%.

Hur stor var materialproduktionens del av den totala produktionen i januari 2009,

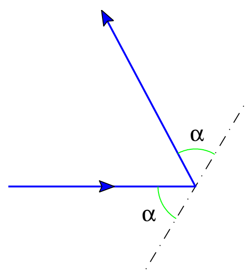
(a) då i januari 2008 material- och serviceproduktionen var lika stora?
(b) då den totala produktionen minskat under perioden med 2,0%?

Ge svaren avrundade till $0,1$%-enhets noggrannhet.

A2 En ljusstråle går längs x-axeln i den positiva riktningen. Strålen reflekteras från linjen $y = k(x-3)$, $k \neq 0$. Strålen går rakt, utom vid reflektion; vid reflektionen är infallsvinkeln och reflexionsvinkeln lika stora (se bilden).

(a) För vilka k skär den reflekterade strålen y-axeln?
(b) I vilken punkt, om i någon överhuvud, skär den reflekterade strålen y-axeln, då $k = 2$?

Ge i (a) exakt svar och i (b) närmevärde med fyra decimaler.



A3 Bestäm arean av det ändliga område, som begränsas av kurvorna

$$y = x^3 - ax \qquad \text{ja} \qquad y = (a-1)x^2,$$

(a) då $a = 0$,
(b) då $a > 0$.

A4 Låt $f(t)$ beteckna koncentrationen av en substans i ett sampel vid tidpunken $t > 0$. Antag, att koncentrationen varierar enligt modellen $f(t) = a\,t^b$, där a och b är obekanta tidsoberoende konstanter. Vilken är, enligt den antagna modellen, koncentrationen vid tidpunkten $t = 3$, då koncentrationerna $f(2) = 7$ och $f(5) = 3$ är bekanta?

Ange koncentrationens exakta värde och dess närmevärde med tre decimaler.

A5 Betrakta talföljden

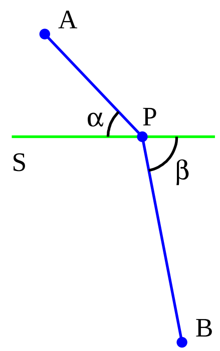
$$a_n = n^{2010}/e^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Vilket i ordningen är det största talet i talföljden, eller finns det ett största tal överhuvudtaget? Motivera ditt svar noggrannt.

A6 Vi betraktar en situation som illustreras av vidstående figur. Linjen S representerar en strandlinje, som antas ligga på koordinatsystemets x-axel. I punkten $A = (0, a)$ befinner sig en simvakt, som upptäcker en simmare i nöd i punkten $B = (c, -b)$, $(a, b, c > 0)$. Simvakten springer med farten v_1 raka vägen till punkten P på stranden och simmar därifrån med farten v_2 raka vägen till den drunknande.

Motivera varför på den snabbaste rutten

$$\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2}.$$



Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps.* Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted.

Allowed instruments: Writing instruments, non–programmable calculators, non–electronic general-language dictionaries to/from English.

Attachment: Table of formulae.

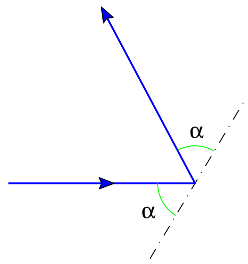
A1 The gross product is divided into materials and services. One compares the production in January 2008 to the production in January 2009. During this one-year period, the production of materials increased 2.0% and the production of services diminished 7.0%.

How large was the share of the materials in the gross product in January 2009,

(a) when in January 2008 the production of materials and the services where equal?
(b) when the gross product diminished 2.0% during the one-year period?

Give both the answers rounded to the accuracy of 0, 1%-points.

A2 A beam of light travels along the x-axis in the positive direction. The beam is reflected from the line $y = k(x-3)$, $k \neq 0$. The beam travels straight, except when it is reflected; at the reflection, the angle of incidence equals the angle of reflection (see the figure).



(a) For which values of k does the reflected beam intersect with the y-axis?

(b) At what point, if any, does the beam intersect the y-axis, when $k = 2$?

Give the exact value of the answer in (a) and the answer in (b) rounded to the accuracy of four decimal places.

A3 Determine the area of the finite region enclosed by the curves

$$y = x^3 - ax \qquad \text{and} \qquad y = (a-1)x^2$$

(a) as $a = 0$,
(b) as $a > 0$.

A4 Let $f(t)$ denote the concentration of a substance in a sample at the time $t > 0$. Assume that the concentration varies in accordance with the model $f(t) = a\,t^b$, where a and b are unknown time independent coefficients. What is the concentration according to the assumed model at the time $t = 3$, when the concentrations $f(2) = 7$ and $f(5) = 3$ are known?

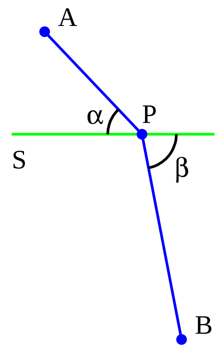
Give the exact value of the concentration and its approximation rounded to the accuracy of three decimals.

A5 Consider the sequence

$$a_n = n^{2010}/e^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

For which n does one obtain the largest number in the sequence, if there is such a number. Justify your claim rigorously.

A6 Consider the attached figure. The line S represents the shore, which is assumed to coincide with the x-axis of the co-ordinate system. A life guard at point $A = (0, a)$ spots a distressed swimmer at the point $B = (c, -b)$, $(a, b, c > 0)$. The life guard runs at the speed v_1 straight to the point P on the shore and continues swimming at the speed v_2 straight to the drowning swimmer.



Justify why on the fastest possible route

$$\frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2}.$$

Tehtävä 1

Yleisesti, merkitään vuonna 2008 materiaalituotannon osuutta μ ja (tuntematonta) kokonaistuotantoa T. Vuonna 2009 merkitään vastaavia suureita pilkulla: μ', T'. Merkitään vuosien 2009 ja 2008 materiaalituotantojen suhdetta α ja vastaavasti palvelutuotantojen β. (α, β ovat kasvukertoimet.) Saadaan

vuosi	kasvu	2008	2009
materiatuotanto	α	μT	$\alpha\mu T$
palvelutuotanto	β	$(1-\mu)T$	$\beta(1-\mu)T$
kokonaistuotanto		T	$\alpha\mu T + \beta(1-\mu)T$

Materiatuotannon osuus 2009 näin ollen

$$\mu' = \frac{\alpha\ \mu T}{\alpha\ \mu T + \beta(1-\mu)T} = \frac{\alpha\ \mu}{\alpha\ \mu + \beta(1-\mu)}. \tag{1}$$

(a) Kohdassa (a) $\mu = 1 - \mu$, joten (1) saa muodon

$$\mu' = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

(b) Kohdassa (b) emme suoraan tunne μ:tä, mutta tiedämme kokonaistuotannon muutoksen. Merkitään kokonaistuotannon tunnettua kasvukerrointa γ, tällöin saadaan

$$T' = \gamma T = \alpha\mu T + \beta(1-\mu)T \quad \Rightarrow \mu = \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}.$$

Sijoittamalla μ lausekkeeseen (1) saadaan tulos.

A

$\mu = 0{,}50$
$\alpha = 1 + \frac{2{,}0\%}{100\%} = 1{,}020$
$\beta = 1 - \frac{7{,}0\%}{100\%} = 0{,}930$

$\mu' = 0{,}5100/0{,}9750 = 0{,}523077\ldots \approx 0{,}523$

$\gamma = 1 - \frac{2{,}0\%}{100\%} = 0{,}980$

$\mu = 0{,}555556\ldots$
$\mu' = 0{,}57823\ldots \approx 0{,}578$

B

$\mu = 0{,}50$
$\alpha = 1 + \frac{3{,}0\%}{100\%} = 1{,}030$
$\beta = 1 - \frac{8{,}0\%}{100\%} = 0{,}920$

$\mu' = 0{,}5150/0{,}9750 = 0{,}528205\ldots \approx 0{,}528$

$\gamma = 1 - \frac{4{,}0\%}{100\%} = 0{,}960$

$\mu = 0{,}363636\ldots$
$\mu' = 0{,}39015\ldots \approx 0{,}390$

C

$\mu = 0{,}50$
$\alpha = 1 + \frac{3{,}0\%}{100\%} = 1{,}030$
$\beta = 1 - \frac{5{,}0\%}{100\%} = 0{,}950$

$\mu' = 0{,}5150/0{,}9900 = 0{,}520202\ldots \approx 0{,}520$

$\gamma = 1 - \frac{2{,}0\%}{100\%} = 0{,}980$

$\mu = 0{,}375000\ldots$
$\mu' = 0{,}39413\ldots \approx 0{,}394$

D

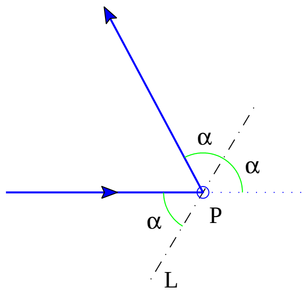
$\mu = 0{,}50$
$\alpha = 1 + \frac{4{,}0\%}{100\%} = 1{,}040$
$\beta = 1 - \frac{9{,}0\%}{100\%} = 0{,}910$

$\mu' = 0{,}5200/0{,}9750 = 0{,}533333\ldots \approx 0{,}533$

$\gamma = 1 - \frac{6{,}0\%}{100\%} = 0{,}940$

$\mu = 0{,}230769\ldots$
$\mu' = 0{,}25532\ldots \approx 0{,}255$

Tehtävä 2



Suora L muodostaa positiivisen x-akselin (tuleva säde) kanssan kulman α. Heijastuneen säteen kulma x-akselin suhteen 2α. Toisaalta kulmakertoimelle $k = \tan \alpha$.

Fotoni leikkaa suoran $L : y = k(x - a)$ pisteessä $P = (x_0, 0)$, josta

$$k(x_0 - a) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_0 = a.$$

(a) Koska $a > 0$, y-akseli on pisteen vasemmalla puolella. Niinpä säde kohtaa y-akselin, jos se heijastuu “takaisinpäin”, eli

$$|2\alpha| > \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| > \pi/4 \quad \Leftrightarrow$$

$$|\tan \alpha| = |k| > \tan \pi/4 \quad \Leftrightarrow \quad |k| > 1.$$

(Suoran ja x-akselin välisen kulman on siis oltava yli 45°. Huomaa, että säde voi heijastua myös x-akselin alapuolelle, kun $k < -1$.)

(b) Nyt $|k| > 1$, joten fotoni kohtaa y-akselin uudestaan. Heijastunut fotoni kulkee pisteen P kautta suoraa

$$y - 0 = k_r(x - x_0),$$

jossa kulmakerroin

$$k_r = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2k}{1 - k^2},$$

kun $k = \tan\alpha$. Tämän suoran leikkauspisteessä y-akselin kanssa, piste $(0, b)$, pätee

$$b = k_r(0 - x_0) = -k_r x_0.$$

Numeeriset likiarvot k_r ja b ovat riittävät.

A	B	C	D
$a = x_0 = 3$	$a = x_0 = 6$	$a = x_0 = 2$	$a = x_0 = 6$
$k = 2$ $k_r = -1{,}3333$ $b = 4{,}0000$	$k = 3$ $k_r = -0{,}7500$ $b = 4{,}5000$	$k = 3$ $k_r = -0{,}7500$ $b = 1{,}5000$	$k = 2$ $k_r = -1{,}3333$ $b = 8{,}0000$

Tehtävä 3

Merkitään

$$f(x) = x^3 - ax \quad \text{ja} \quad g(x) = (a-1)x^2,$$

jolloin käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ leikkauspisteiden x-koordinaatit toteuttavat

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + (1-a)x^2 - ax = 0.$$

Kohta (a): Kun $a = 0$, saadaan $h(x) = x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0$, eli $x \in \{0, -1\}$. Koska leikkauspisteitä on vain kaksi, ala

$$A = \int_{-1}^{0} |h(x)|; dx = \int_{-1}^{0} x^3 + x^2 \; dx = \Big|_{-1}^{0} \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \; dx = \frac{1}{12}.$$

Kun $a > 0$ saamme leikkauspisteet $x \in \{-1, 0, a\}$ yhtälöstä

$$h(x) = x(x^2 + (1-a)x - a) = 0 = x(x+1)(x-a) = 0.$$

Kysytty pinta-ala on $A = \int_{-1}^{a} |h(x)| \; dx$. Selvästi $h(x) > 0$ kun $-1 < x < 0$, ja $h(x) < 0$ kun $0 < x < a$.

Pinta-alalle saadaan

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{a} |h(x)| \; dx &= \int_{-1}^{0} h(x) \; dx - \int_{0}^{a} h(x) \; dx \\ &= 0 \quad - \frac{1}{12}(3 - 4(1-a) - 6a) \quad + 0 \quad - \frac{1}{12}(3a^4 + 4(1-a)a^3 - 6a^3) \\ &= \frac{1}{12}\left(1 + 2a + 2a^3 + a^4\right) \end{aligned}$$

jossa funktion h integraalifunktio on

$$\int h(x) \; dx = \frac{1}{12}(3x^4 + 4(1-a)x^3 - 6ax^2).$$

Tehtävä 4

Merkitään tunnetuissa mittauksissa ajanhetkiä t_1, t_2 ja vastaavia mitta-arvoja c_1, c_2.

Tapa 1 Sijoittamalla suoraan malliin saadaan

$$\begin{aligned} c_1 &= a t_1^b \\ c_2 &= a t_2^b \end{aligned}$$

Josta puolittain jakamalla saadaan

$$c_1/c_2 = (t_1/t_2)^b, \qquad \ln(c_1/c_2) = b\ \ln(t_1/t_2), \qquad b = \frac{\ln c_1 - \ln c_2}{\ln t_1 - \ln t_2}.$$

Sijoittamalla takaisin saamme $a = c_1 t_1^{-b}$. Kysytty pitoisuus on nyt

$$c = f(t) = at^b = c_1 (t/t_1)^b$$

Tapa 2 Ottamalla mallista logaritmi saamme $\ln f(t) = \ln a + b \ln t$. Sijoitamalla saamme linearisen yhtälöryhmän:

$$\begin{aligned} \ln c_1 &= \ln a + b \ln t_1 \\ \ln c_2 &= \ln a + b \ln t_2 \end{aligned}$$

josta vähentämällä (sopivasti kertomalla) puolittain saamme

$$b = \frac{\ln c_1 - \ln c_2}{\ln t_1 - \ln t_2}, \qquad \ln a = \frac{\ln t_1 \ln c_2 - \ln t_2 \ln c_1}{\ln t_1 - \ln t_2}.$$

Sijoittamalla a, b, t saadaan pitoisuus

$$c = f(t) = e^{\ln a}\ t^b$$

A	B	C	D
$t_i = 2,\ 5$	$t_i = 2,\ 5$	$t_i = 2,\ 5$	$t_i = 2,\ 5$
$c_i = 7,\ 3$	$c_i = 5,\ 3$	$c_i = 7,\ 2$	$c_i = 3,\ 2$
$b = -0{,}92470\ldots$	$b = -0{,}55749\ldots$	$b = -1{,}36721\ldots$	$b = -0{,}44251\ldots$
$a = 13{,}28806\ldots$	$a = 7{,}35855\ldots$	$a = 18{,}05800\ldots$	$a = 4{,}07689\ldots$
$t = 3$	$t = 4$	$t = 4$	$t = 3$
$c = f(t) = f(3)$	$c = f(t) = f(4)$	$c = f(t) = f(4)$	$c = f(t) = f(3)$
$= 4{,}81134\ldots$	$= 3{,}39741\ldots$	$= 2{,}71348\ldots$	$= 2{,}50726\ldots$
$\approx 4{,}811$	$\approx 3{,}397$	$\approx 2{,}713$	$\approx 2{,}507$

Tehtävä 5

Seuraavassa mallivastauksessa p saa sarjoittain arvot

A	B	C	D
$p = 2010$	$p = 2012$	$p = 2014$	$p = 2016$

Tapa 1 On määritelty $a_n = n^p/e^n$. Merkitään $f(x) = x^p/e^x$, jossa $x \in \mathbb{R}$ ja $x \geq 1$. Koska luonnolliset luvut ovat reaalukujen osajoukko, pätee

$$\max_n a_n = \max_{x \in \mathbb{N}} f(x) \leq \max_{1 \leq x,\, x \in \mathbb{R}} f(x). \tag{2}$$

Reaalilukujen joukossa f on jatkuva ja derivoituva toisin kuin luonnollisten lukujen joukossa. Etsitään yhtälön (2) oikean puolen maksimikohta. Tarkastellaan derivaatan nollakohtia.

$$f'(x) = e^{-x}[px^{p-1} - x^p] = \underbrace{e^{-x}x^{p-1}}_{>0,\text{ kun } x>0} (p - x) = 0.$$

Derivaatan ainoa nollakohta $x > 1$ on $x = p$. Koska $f'(x) > 0$ kun $x < p$ ja $f'(x) < 0$ kun $x > p$ joten $f(x)$ on aidosti kasvava funktio $x < p$ ja aidosti vähenevä kun $x > p$. Niinpä $x = p$ on globaali maksimikohta funktiolle $f(x)$ reaalilukujen joukossa.

Koska p on luonnollinen luku, on $n = p$ myös maksimikohta luonnollisten luku a_n yli.

(Mikäli saatu nollakohta ei olisi kokonaisluku, pitäisi tarkastella funktion arvot kummallakin lähimmällä kokonaislukuarvolla. Nyt yhtälössä (2) pätee yhtäsuuruus.)

Tapa 2 Muodostetaan uusi sarja

$$b_n = \ln a_n = p \ln x - x.$$

Koska logaritmi, $\ln : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, on aidosti kasvava funktio.

$$a_n \geq a_m \Leftrightarrow b_n \geq b_m \qquad \text{ja} \qquad a_n \leq a_m \Leftrightarrow b_n \leq b_m.$$

Niinpä $\{b_n\}$ ja $\{a_n\}$ saavat maksimiarvonsa samalla parametrin n arvolla.

Haarukoimalla päädytään $b_p > b_{p-1}, b_{p+1}$, jolloin on löydetty lokaali maksimi, muttei välttämättä globaalia maksimia.

Tehtävä 6

Voidaan olettaa $v_i > 0$, ja olettaa tunnetuksi, että lyhyin tien pisteiden A, P ja toisaalta P, B välillä on suora.

Vaihtoehto 1 Tutkitaan siis pisteen P paikan valinnan merkitystä. Kiinnitetään koordinaatiston x-akseli rantaviivaan, origo on pisteen A projektio x-akselille, positiivinen suunta kuvassa oikealle. Merkitään pisteitä

$$A = (0, a), \quad B = (x, 0), \quad P = (d, c),$$

jossa $x \in \mathbb{R}$. Matkaan käytetty aika t on

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{c^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Toisaalta

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{d - x}{\sqrt{c^2 + (d - x)^2}}$$

Koska $t \to \infty$ kun $|x| \to \infty$, derivaatan $t'(x)$ nollakohta vastaa ajan minimoivaa reittiä:

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-(d - x)}{v_2\sqrt{c^2 + (d - x)^2}} = \frac{\cos\alpha}{v_1} - \frac{\cos\beta}{v_2} = 0.$$

Nopeimmalla reitillä siis pätee annettu sidos.

Huomautus. Jos edellä minimointi suoritetaan $x \in [0, d]$ tai $x \in (0, d)$ suhteen, joudutaan explisiittisesti ratkaisemaan kriittinen arvo x_*, $t'(x_*) = 0$, ja tutkimaan tapaukset $t(0)$, $t(x_*)$ ja $t(d)$. Parin $(x_*, f(x_*))$ laskeminen on kuitenkin ilmeisen työlästä.

Vaihtoehto 2 Valitsemalla kulmat $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ muuttujiksi, saadaan

$$t = \frac{a}{v_1 \sin\alpha} + \frac{c}{v_2 \sin\beta}, \qquad \frac{a}{\tan\alpha} + \frac{c}{\tan\beta} = d$$

Selvästi pisteen P siirtyminen kauas välin ulkopuolelle ($\alpha \to 0$ tai $\alpha \to \pi$) kasvattaa aikaa äärettömiin. Nopeimmalla reitillä on siis $t' = 0$. Olettamalla α, β jonkin yhteisen parametrin monotoniksi funktioiksi saadaan

$$t' = \frac{a\ \cos\alpha}{v_1 \sin^2\alpha}\alpha' + \frac{c\ \cos\beta}{v_2 \sin^2\beta}\beta' = 0, \qquad \underbrace{\frac{a}{\sin^2\alpha}\alpha'}_{=:T} + \underbrace{\frac{c}{\sin^2\beta}\beta'}_{-T} = 0$$

(Esimerkiksi muuttujana α, jolloin $\beta = \beta(\alpha)$, $\alpha' = 1$ ja $\beta'(\alpha) < 0$.) Koska parametrisointi on monotoninen, $\alpha' \neq 0$, joten $T \neq 0$. Erottamalla tekijä T vasemmasta yhtälöstä saadaan väite

$$t' = T\left(\frac{\cos\alpha}{v_1} - \frac{\cos\beta}{v_2}\right) = 0$$