Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, ja perustele ratkaisun vaiheet. Tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja laskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 (a) Sievennä lauseke $\dfrac{(\sqrt[6]{9a})^{12}}{3^2a^{-5}}$, $a > 0$, muotoon ka^r, missä k ja r ovat reaalilukuja.

(b) Ratkaise epäyhtälö $(x-1)^2 < 9$.

(c) Ratkaise yhtälö $2\sin x - 1 = 0$, $0 \le x \le 2\pi$.

A2 Olkoon
$$f(x) = \frac{11}{x} + 4\int_0^1 t\,dt, \quad x > 0.$$

(a) Laske $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(b) Määritä se funktion f integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1,-2)$ kautta.

A3 Asumistukea maksetaan 80 % vuokran määrästä, siltä osin kuin vuokra ei ylitä 252 euroa. Vuokran määrää vähennettynä asumistuella kutsutaan omavastuuksi.

(a) Minkä suuruinen vuokra on, kun omavastuu on puolet vuokrasta?

(b) Vuokran määrä on x euroa ja omavastuu y euroa. Vuokraa korotetaan $p = 29\,\%$, jolloin asumistuki ensi kerran nousee täysimääräiseksi ja omavastuu kasvaa $q = 65\,\%$:a. Kuinka suuri vuokran määrä oli ennen korotusta?

A4 Määrää käyrän $f(x) = e^{-2x}$ tangentin yhtälö pisteessä $(0, f(0))$. Laske sen äärellisen alueen pinta-ala, jota rajoittavat x-akseli, käyrä $y = f(x)$, käyrän pisteeseen $(0, f(0))$ piirretty normaali sekä suora $x = M$, $M > 0$. Laske pinta-alan lausekkeelle raja-arvo, kun M kasvaa rajatta.

Opastus: Tangentin ja normaalin kulmakertoimien tulo on -1, elleivät suorat ole koordinaattiakselien suuntaisia.

A5 Yhtälössä $ax^2 + bx + c = 0$ esiintyvät kertoimet a, b, c saavat arvoja joukosta $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kukin määrätään arpanoppaa heittämällä.

(a) Millä todennäköisyydellä yhtälön juuret ovat reaaliset, kun kertoimille a ja b on saatu arvot $a = 1$ ja $b = 4$?

(b) Millä todennäköisyydellä yhtälön juuret ovat reaaliset, kun kertoimelle b on saatu arvo $b = 4$?

(c) Millä todennäköisyydellä yhtälön juuret ovat reaaliset?

A6 Jono $u_0, u_1, u_2, \ldots$ on muotoa $u_n = a + nb$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja $n = 0, 1, 2, \ldots$. Luvut

$$\ln 3, \quad \ln(e^x - 3) \quad \text{ja} \quad \ln(e^x + 3)$$

ovat annetussa järjestyksessä mainitun jonon kolme peräkkäistä jäsentä. Laske jonon seuraavan jäsenen tarkka arvo ja likiarvo.

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier* och motivera lösningens samtliga steg. Renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och räknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 (a) Förenkla uttrycket $\dfrac{(\sqrt[6]{9a})^{12}}{3^2a^{-5}}$, $a > 0$, och ge det på formen ka^r, där k och r är reella tal.

(b) Lös olikheten $(x-1)^2 < 9$.

(c) Lös ekvationen $2\sin x - 1 = 0$, $0 \le x \le 2\pi$.

A2 Låt
$$f(x) = \frac{11}{x} + 4\int_0^1 t\,dt, \quad x > 0.$$

(a) Beräkna $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(b) Bestäm den integralfunktionen till funktion f, vars graf går igenom punkten $(1, -2)$.

A3 Boendestödet utgör 80 % av den delen av hyran, som inte överskrider 252 euro. Den delen av hyran som återstår, då boendestödet dragits av, kallas för självansvarsdelen.

(a) Hur stor är hyran, om självansvarsdelen är hälften av hyran?

(b) Hyran är x euro och självansvarsdelen är y euro. Hyran höjs med $p = 29\,\%$, varvid boendestödet ökar för första gången till fullt belopp och självansvarsdelen växer med $q = 65\,\%$. Hur hög var hyran före höjningen?

A4 Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan $y = f(x) = e^{-2x}$ i punkten $(0, f(0))$. Beräkna arean hos det begränsande området, som begränsas av x-axeln, kurvan $y = f(x)$, normalen till kurvan i punkten $(0, f(0))$ samt linjen $x = M$, $M > 0$. Beräkna areans gränsvärde, då M växer över alla gränser.

Tips: Tangentlinjens och normallinjens lutningar har produkten -1, såvida linjerna inte är parallella med koordinataxlarna.

A5 Koefficienterna a, b, c i ekvationen $ax^2+bx+c = 0$ får värden från mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Varje koefficient bestäms genom att kasta en tärning.

(a) Vad är sannolikheten att ekvationens rötter är reella, om koefficienterna a och b har fått värdena $a = 1$ respektive $b = 4$?

(b) Vad är sannolikheten att ekvationens rötter är reella, om koefficienten b har fått värdet $b = 4$?

(c) Vad är sannolikheten att ekvationens rötter är reella?

A6 Talföljden $u_0, u_1, u_2, \ldots$ är på formen $u_n = a + nb$, där a och b är reella tal och $n = 0, 1, 2, \ldots$. Talen

$$\ln 3, \quad \ln(e^x - 3) \quad \text{och} \quad \ln(e^x + 3)$$

är tre på varande följande tal i talföljden i denna givna ordning. Beräkna exakta värdet och närmevärdet för nästa tal i taföljden.

Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps* and justifying every step of the solution. Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted and each solution is graded as an entity.

Allowed instruments: Writing instruments, calculator; no dictionaries are allowed.
Attachment: Table of formulae.

A1 (a) Simplify the expression $\dfrac{(\sqrt[6]{9a})^{12}}{3^2a^{-5}}$, $a > 0$ into the form ka^r, where k and r are real numbers.

(b) Solve the inequality $(x-1)^2 < 9$ for x.

(c) Solve the equality $2\sin x - 1 = 0$ for x, where $0 \le x \le 2\pi$.

A2 Let $$f(x) = \frac{11}{x} + 4\int_0^1 t\,dt, \quad x > 0.$$

(a) Compute $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(b) Determine the integral function[1] of f whose graph passes through the point $(1, -2)$.

A3 A rent subsidy equals 80 % of that part of the rent which does not exceed 252 euros. The tenant payment is therefore the amount of rent minus the subsidy.

(a) What is the rent if the tenant payment equals half of the amount of rent?

(b) The amount of the rent is x euros and the tenant payment is y euros. The rent is raised by $p = 29\,\%$, whereby the subsidy for the first time increases to its maximum amount and the tenant payment increases by $q = 65\,\%$. What was the amount of the rent before the raise?

A4 Determine the equation for the tangent line of the curve $f(x) = e^{-2x}$ at the point $(0, f(0))$. Compute the finite area bounded by the x-axis, the curve $y = f(x)$, the normal line of the said curve at the point $(0, f(0))$, and the line $x = M$, $M > 0$. Compute the limit of the area, when M increases without limit.

Hint: The product of the slope of the tangent line and that of the normal line is -1, unless the lines are parallel with the co-ordinate axes.

A5 The coefficients a, b, c in the equation $ax^2 + bx + c = 0$ obtain their values from the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Each coefficient is determined by throwing a dice.

(a) What is the probability that the roots of the equation are real, when the coefficients a and b have obtained values $a = 1$ and $b = 4$?

(b) What is the probability that the roots of the equation are real, when the coefficient b has obtained value $b = 4$?

(c) What is the probability that the roots of the equation are real?

A6 A sequence $u_0, u_1, u_2, \ldots$ is of the form $u_n = a + nb$, where a and b are real numbers and $n = 0, 1, 2, \ldots$. The numbers

$$\ln 3, \quad \ln(e^x - 3) \quad \text{and} \quad \ln(e^x + 3),$$

in the given order, are three consecutive members in the sequence. Give the exact value and a numerical approximation for the next member in the sequence.

[1] alias anti-derivative

Tehtävä 1

	A	B	C	D
(a) Yleisesti (koska $9 = 3^2$) $$\frac{(\sqrt[m]{9a})^n}{3^k a^{-l}} = 3^{\frac{2n}{m}-k} a^{\frac{n}{m}+l}$$	$\frac{(\sqrt[6]{9a})^{12}}{3^2 a^{-5}} = 3^2 a^7$	$\frac{(\sqrt[4]{9a})^{12}}{3^2 a^{-4}} = 3^4 a^7$	$\frac{(\sqrt[5]{9a})^{15}}{3^3 a^{-3}} = 3^3 a^6$	$\frac{(\sqrt[3]{9a})^{9}}{3^4 a^{-2}} = 3^2 a^5$
(b) Tapa 1: $$\begin{aligned} & (x-1)^2 < a && (1) \\ \Leftrightarrow\quad & \lvert x-1\rvert < \sqrt{a} && (2) \\ \Leftrightarrow\quad & -\sqrt{a} < x-1 < \sqrt{a} && (3) \\ \Leftrightarrow\quad & 1-\sqrt{a} < x < 1+\sqrt{a} && (4) \end{aligned}$$ (b) Tapa 2: $$(x-1)^2 < a \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2x+1-a^2 < 0.$$ Nollakohdat vasemman puolen lausekkeelle ovat $$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4(a^2-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{a}.$$ Koska polynomi "aukeaa ylöspäin" negatiiviset arvot ovat nollakohtien välissä, $$1-\sqrt{a} < x < 1+\sqrt{a}.$$	$a = 9$; $\sqrt{a} = 3$ $-2 < x < 4$	$a = 36$; $\sqrt{a} = 6$ $-5 < x < 7$	$a = 16$; $\sqrt{a} = 4$ $-3 < x < 5$	$a = 25$; $\sqrt{a} = 5$ $-4 < x < 6$
(c) $$2\sin x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x = \frac{1}{2}$$ josta $x \in \{\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}\} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$	$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

Tehtävä 2

Funktiossa, yleistä muotoa

$$f(x) = \frac{a}{x} + 2b\int_0^1 t\,dt, \tag{5}$$

ensinnäkin

$$\int_0^1 t\,dt = \Big/_0^1 \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

joten

$$f(x) = \frac{a}{x} + b. \tag{7}$$

(a) Saamme siis

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \Big/_1^2 a\ln|x| + bx \tag{8}$$

$$= a\ln 2 + b \tag{9}$$

(b) Integraalifunktio on siis

$$F(x) = a\ln|x| + bx + C$$

jolle pätee $F(1) = -2$ eli

$$a\ln 1 + \frac{1}{2}b + C = b + C = -2; \quad C = -2 - b. \tag{10}$$

A	B	C	D
$a = 11$ $b = 2$ $f(x)$ $= \frac{11}{x} + 4\int_0^1 t\,dt$ $= \frac{11}{x} + 2.$	$a = 9$ $b = 3$ $f(x)$ $= \frac{9}{x} + 6\int_0^1 t\,dt$ $= \frac{9}{x} + 3.$	$a = 7$ $b = 4$ $f(x)$ $= \frac{7}{x} + 8\int_0^1 t\,dt$ $= \frac{7}{x} + 4.$	$a = 5$ $b = 6$ $f(x)$ $= \frac{5}{x} + 12\int_0^1 t\,dt$ $= \frac{5}{x} + 6.$
$\int_1^2 f(x)\,dx$ $= [11\ln|x| + 2x]_{x=1}^2$ $= 11\ln 2 + 2$	$\int_1^2 f(x)\,dx$ $= [9\ln|x| + 3x]_{x=1}^2$ $= 9\ln 2 + 3$	$\int_1^2 f(x)\,dx$ $= [7\ln|x| + 4x]_{x=1}^2$ $= 7\ln 2 + 4$	$\int_1^2 f(x)\,dx$ $= [5\ln|x| + 6x]_{x=1}^2$ $= 5\ln 2 + 6$
$F(x)$ $= 11\ln|x| + 2x + C$	$F(x)$ $= 9\ln|x| + 3x + C$	$F(x)$ $= 7\ln|x| + 4x + C$	$F(x)$ $= 5\ln|x| + 6x + C$
$F(1)$ $= 11\ln 1 + 2 + C$ $= 2 + C = -2$ $C = -4.$	$F(1)$ $= 9\ln 1 + 3 + C$ $= 3 + C = -2$ $C = -5.$	$F(1)$ $= 7\ln 1 + 4 + C$ $= 4 + C = -2$ $C = -6.$	$F(1)$ $= 5\ln 1 + 6 + C$ $= 6 + C = -2$ $C = -8.$

Tehtävä 3

(a) Tuki ennen korotusta on

$$y = 0.8x \max(x, 252) = 0.8 \begin{cases} x, & x \leq 252 \\ 252, & x \geq 252 \end{cases}. \tag{11}$$

Nyt $x = 2y$. Selvästi pitää olla $x > 252$, sillä muutoin omavastuu $x - y = (1 - 0.8)x \neq 0,5x$ (eli omavastuu olisi 20% vuokrasta, ei puolet). Saamme

$$x = 2y = 2 \cdot 0,8 \cdot 252 = 403,20.$$

(b) Omavastuu on maksimissaan, kun $x \geq 252$. Tuki ennen korotusta ei ole maksimaalinen, eli $x < 252$ ja siis omavastuuosuus $y = (1 - 0.8)x$.
Toisaalta korotuksen jälkeen tiedämme, että uusi tuki on täysimääräinen $x^* - y^* = 0.8 \cdot 252 = 201,60$ ja uusi vuokra ja omavastuuosuus ovat vastaavasti

$$x^* = (1 + p)x \quad \geq 252 \quad \text{ja} \quad y^* = (1 + q)y$$

Yhdistämällä saamme vuokran ennen korotusta:

$$\begin{cases} x^* - y^* = (1 + p)x - (1 + q)y = 201,60 \\ y = 0.2x \end{cases} \tag{12}$$

$$[1 + p - 0.2(1 + q)]x = 201,60 \tag{13}$$

$$x = \frac{201,60}{0.8 + p - 0.2q} \quad \text{ja} \quad y = 0.2x \tag{14}$$

A	B	C	D
$x = 403,20$	$x = 403,20$	$x = 403,20$	$x = 403,20$
$p = 29\,\%$ $q = 65\,\%$	$p = 33\,\%$ $q = 61\,\%$	$p = 44\,\%$ $q = 60\,\%$	$p = 60\,\%$ $q = 70\,\%$
$x^* = 1,29x$ $y^* = 1,65x$	$x^* = 1,33x$ $y^* = 1,61x$	$x^* = 1,44x$ $y^* = 1,60x$	$x^* = 1,60x$ $y^* = 1,70x$
$x = \frac{201,60}{1,0417} = 210$ $y = 0.2x = 42$	$x = \frac{201,60}{0,99206} = 200$ $y = 0.2x = 40$	$x = \frac{201,60}{0,89286} = 180$ $y = 0.2x = 36$	$x = \frac{201,60}{0,79365} = 160$ $y = 0.2x = 32$

Tehtävä 4

Funktion $f(x) = e^{-2x}$ kuvaajan tangentti pisteessä $(0, f(0))$ on muotoa

$$y - f(0) = f'(0)\ (x - 0) \tag{15}$$

$$y - 1 = -2(x - 0), \tag{16}$$

$$y = 1 - 2x, \tag{17}$$

jossa $f'(x) = -2e^{-2x}$.

Tangentti ei selvästi ole koordinaattiakselin suuntainen, joten samassa pisteessä normaalin yhtälö on muotoa

$$y - 1 = kx,$$

jossa kulmakerroin $k = -1/f'(0) = \frac{1}{2}$. Normaali leikkaa x-akselin pisteessä $(x_0, 0)$ jossa

$$0 = y \quad \Leftrightarrow \quad 0 - 1 = \frac{1}{2}x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -2. \tag{18}$$

Pinta-ala A muodostuu kahdesta osasta: a) suorakulmaisesta kolmiosta jonka kärkipisteet ovat $(x_0, 0)$, origo ja $(0, f(0)$, pinta-alaltaan A_- ja b) kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin väliin jäävästä alasta A_+ arvoilla $x \in [0, M]$.

$$A_- = \frac{1}{2}x_0 f(0) = 1 \tag{19}$$

$$A_+(M) = \int_0^M f(x)\,dx = \int_0^M e^{-2x}\,dx = \Big/_{0}^{M} -\frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{1 - e^{-2M}}{2}. \tag{20}$$

Kun M kasvaa rajatta, $e^{-2M} \to 0$ ja kokonaispinta-ala

$$A = A_- + A_+ = \frac{3 - e^{-2M}}{2} \to \frac{3}{2}.$$

Tehtävä 5

Yhtälön juuret ovat reaaliset, kun diskriminanttille pätee $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Kaikki alkeistapaukset, kolmikot (a, b, c) ovat a-priori yhtä todennäköisiä.

a) Koska $a = 1$ ja $b = 4$ reaalisuusehto $D = b^2 - 4ac \geq 0$ saa muodon

$$c \leq 4.$$

Suotuisia alkeistapauksia ovat $c \in \{1, 2, 3, 4\}$ eli kysytty todennäköisyys $p = 4/6 = 2/3 \approx 0,6667$.

b) Koska $b = 4$, ehtoa $D = b^2 - 4ac \geq 0$ voidaan tarkastella muodossa

$$a \leq 4/c$$

jolle saamme seuraavan taulukon:

	c=1	c=2	c=3	c=4	c=5	c=6	$\forall c$
ehto	$a \leq 4$	$a \leq 2$	$a \leq \frac{4}{3}$	$a \leq 1$	$a \leq \frac{4}{5}$	$a \leq \frac{2}{3}$	
suotuisia a:n arvoja	4	2	1	1	0	0	8

Alkeistapauksia on 6^2, joten kysytty todennäköisyys on $p = 8/6^2 = 2/9 \approx 0,2222$.

c) Nyt ehtoa $D = b^2 - 4ac \geq 0$ voi tarkastella muodossa

$$b \geq \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac} =: g(a, c).$$

Huomaa symmetria $g(x, y) = g(y, x), \forall x, y$.

Suotuiset alkeistapaukset, $b \geq g$, saadaan tarkastelemalla tilannetta eri a ja c arvoilla. Merkintään $\lceil g \rceil$ pienintä kokonaislukua, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin g (pyöristys ylös). Tällöin $\lceil g \rceil$ on pienin sallittu b:n arvo:

$\lceil g \rceil$	c=1	c=2	c=3	c=4	c=5	c=6
a=1	2	3	4	4	5	5
a=2	3	4	5	6	7	7
a=3	4	5	6	7	8	9
a=4	4	6	7	8	9	10
a=5	5	7	8	9	10	11
a=6	5	7	9	10	11	12

Mahdollisten b:n arvojen lukumääriksi, eli suotuisten alkeistapausten $b \geq \lceil g \rceil$ lukumääriksi, saadaan

suotuisia	c=1	c=2	c=3	c=4	c=5	c=6	$\forall c$
a=1	5	4	3	3	2	2	19
a=2	4	3	2	1	0	0	10
a=3	3	2	1	0	0	0	6
a=4	3	1	0	0	0	0	4
a=5	2	0	0	0	0	0	2
a=6	2	0	0	0	0	0	2
$\forall a$	19	10	6	4	2	2	43

Sama määrä saadaan (tietenkin) myös poimimalla kullekin b:n arvolle suotuisat tapaukset $\lceil g \rceil \leq b$

	b=1	b=2	b=3	b=4	b=5	b=6	$\forall b$
ehto	$\lceil g \rceil \leq 1$	$\lceil g \rceil \leq 2$	$\lceil g \rceil \leq 3$	$\lceil g \rceil \leq 4$	$\lceil g \rceil \leq 5$	$\lceil g \rceil \leq 6$	
suotuisia	0	1	3	8	14	17	43

Yhteensä suotuisia tapauksia on siis 43 ja alkeistapauksia on 6^3, joten kysytty todennäköisyys $p = \frac{43}{6^3} = \frac{43}{216} \approx 0,19907$.

Tehtävä 6

Jollakin n ja x

$$\begin{aligned} u_n &= a + nb && = \ln 3 \\ u_{n+1} &= \underbrace{a + nb}_{=u_n} + b && = \ln(e^x - 3) \\ u_{n+2} &= u_n \quad + 2b && = \ln(e^x + 3) \\ u_{n+3} &= u_n \quad + 3b && \end{aligned} \tag{21}$$

Tapa 1 Soveltamalla $\exp(\cdot)$ kahteen viimeiseen sarakkeeseen saamme

$$e^{u_n} = 3 \tag{22}$$

$$e^{u_n} e^b = 3e^b = e^x - 3 \tag{23}$$

$$e^{u_n} e^{2b} = 3e^{2b} = e^x + 3 \tag{24}$$

ratkaistaan e^x yhtälöistä (23) ja (24) ja edelleen e^b

$$e^x = 3e^b + 3 = 3e^{2b} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad (e^b)^2 - e^b - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^b = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} . \tag{25}$$

Koska u_k ja siis myös b ovat reaalisia, $e^b > 0$ ja $b = \ln 2$. Kysytty termi

$$u_{n+3} = u_n + 3b = \ln 3 + 3\ln 2 = \ln 24 \approx 3,1781 \tag{26}$$

Tapa 2 Yhtälöryhmästä(21)

$$b = u_{n+1} - u_n = u_{n+2} - u_{n-1} \tag{27}$$

$$\ln(e^x - 3) - \ln 3 = \ln(e^x + 3) - \ln(e^x - 3) \tag{28}$$

$$\ln\left(\frac{e^x - 3}{3}\right) = \ln\left(\frac{e^x + 3}{e^x - 3}\right) \tag{29}$$

$$\frac{e^x - 3}{3} = \frac{e^x + 3}{e^x - 3}, \qquad (e^x > 3) \tag{30}$$

$$(e^x - 3)^2 = 3(e^x + 3) \tag{31}$$

$$(e^x)^2 - 6e^x + 9 = 3e^x + 9 \tag{32}$$

$$e^x(e^x - 9) = 0 \tag{33}$$

Koska $e^x > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x, saamme $e^x = 9$ ja

$$u_{n+1} = \ln(9 - 3) = \ln 6 \tag{34}$$

$$u_{n+2} = \ln(9 + 3) = \ln 12 \tag{35}$$

$$b = u_{n+1} - u_n = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2 \tag{36}$$

$$u_{n+3} = u_n + 3b = \ln 3 + 3\ln 2 = \ln 24 \tag{37}$$

Arvostelu

Ratkaisut ja nämä arvosteluperusteet heijastavat tyypillisiä käytettyjä ratkaisutapoja. Tehtävät arvostellaan aina kokonaisuutena ja alla luetellut arvosteluperusteet viittaavat nimenomaan malliratkaisuun, ellei muuta mainita.

Tyypillisiä arvosteluun vaikuttavia asioita on ratkaisutavan perustelut, ratkaisun johdonmukaisuus, yksikäsitteisyys ja ristiriidattomuus. Vastauksen tulee olla annettu pyydetyllä tai riittävällä tarkkuudella.

Tehtävä 1

Kukin osatehtävä arvostellaan erikseen 2+2+2p. Kohdassa 2b ei toisen asteen nollakohtien löytymisestä hyvitetä. Kohdassa c täysiin pisteisiin edellytetään kahta arvoa radiaaneissa (alueella $[0, 2\pi]$).

Tehtävä 2

Osatehtäville yhteisiä ovat $f(x)$ sieventäminen $f(x) = \cdots = \frac{a}{x} + 2b$ ja yleisen integraalifunktion $F(x)$ lasku (explisiittisesti tai implisiittisesti määrätyn integraalin alla) kolme pistettä. Loput pisteet ansaitaan a) määrätyn integraalin evaluoinnista (1p) ja b) integraalifunktion määräämisestä kaksi pistettä.

Tehtävä 3

Osakohdat arvostellaan 2p+4p; Kohdassa b voi ansaita kaksi pistettä muodostamalla ratkaisun kahden tuntemattoman yhtälöryhmän (12), kolmannen pisteen ansaitsee yhden tuntemattoman yhtälöstä.

Tehtävä 4

Tehtävä jaetaan osatehtäviin: normaalin ja tangentin löytäminen (+2p); A_+ laskeminen (+2p); A_- (+1p); Vastaus $A = A_+ + A_-$ raja-arvoineen (+1p). Leikkauspisteen x_0 ratkaisemisesta ei hyvitetä erikseen.

Mikäli virhe normaalin määrittämisessä ei oleellisesti muuta laskun lopun kulkua, hyvitetään laskusta ansioiden mukaan. Mutta erityisesti, mikäli normaaliksi on määritetty väärin epälineaarinen käyrä, kuten $y - 1 = -2e^{-2x}(x - 0)$, katsotaan tämä vakavaksi periaatevirheeksi ja lasku on lähes arvoton ja arvostellaan korkeintaan kahdn pisteen arvoiseksi.

Tehtävä 5

Tehtävän arvostelu 1+2+3p osakohdittain.

Virhe alkeistapauksen kokonaismäärässä tulkitaan periaatevirheeksi (väh. -2p), pieni virhe suotuisten alkeistapausten määrässä on lievä virhe (-1p).

Mikäli ratkaisussa on tarkasteltu vain tapaus $D > 0$, eli vain tapausta jossa juuret ovat erisuuria, hyväksytään ratkaisu.

Mikäli ratkaisussa on tarkasteltu rationaalisia juuria, annetaan osakohdista, mikäli muilta osin täysin oikein, 0+1+2p.

Tehtävä 6

Oleellista tehtävän arvostelun kannalta on, että hakija osoittaa ymmärtävänsä, että ratkaisu on olemassa vain tietyille x arvoille ja pyrkii ratkaisemaan b ja x:n mahdolliset arvot. Osaratkaisut: i) kaksi yhtälöä kaksi tuntematonta, kuten (22) ja (23), kaksi pistettä ; ii) yhden tuntemattoman yhtälö, kuten (24) kolme pistettä.

Mikäli tämä ei käy ratkaisusta muuten ilmi, ratkaisussa on huomioitava, että $e^x - 3 = 6 > 0$ muutoin reaaliratkaisuja ei olisi. Mikäli hakija olettaa, ilman perustelua, että voidaan valita $n = 0$ annetaan tehtävästä korkeintaan 5p; Mikäli hakija esittää vastauksen ratkaisematta e^x:n arvoa, esimerkiksi muodossa $u_{n+3} = u_{n+2} + b = \ln\left[\frac{1}{3}e^{2x} - 3\right]$, voidaan tehtävästä hyvittää korkeintaan kaksi pistettä.