Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 Yritys myy katuvalaisimia 60000 kappaletta vuodessa. Valaisimien hankintahinta on 430 €/kpl. Tehtaan kanssa sovitaan kaikille tilauserille kiinteä koko n kappaletta valaisimia per erä. Yrityksen varasto mitoitetaan tilauserän mukaan, ja varastotilasta maksetaan $24\,n$ €/vuosi. Valaisinerän toimitus tehtaalta maksaa 961 € erän koosta riippumatta. Uusi valaisinerä tilataan saapumaan vasta, kun edellinen erä on kokonaisuudessaan toimitettu varastosta asiakkaalle.

(a) Mikä tulisi valaisimen myyntihinnan olla euroina ja sentteinä, jotta yllämainitut kulut katettaisiin, kun $n = 5000$?

(b) Mikä tilauserän koon n tulisi olla, jotta kustannukset minimoituisivat?

A2 Auton pyörä koostuu vanteelle asennetusta renkaasta. Auton renkaalla on suositeltu pyörimissuunta. Vanteet voidaan asentaan paikalleen vain “sisäpuoli” autoon päin, rengas vanteelle kumminpäin vain. Etu- ja takapyörät ovat samanlaiset.

(a) Auton neljä pyörää on otettu pois huollon ajaksi. Ne tulisi asentaa takaisin säilyttäen kunkin renkaan suositeltu pyörimissuunta. Millä todennäköisyydellä näin käy, jos pyörät asennetaan takaisin satunnaisesti?

(b) Neljä rengasta asennetaan vanteille ja pyörät edelleen auton alle - kaikki tapahtumat tehdään satunnaisesti toisistaan riippumatta. Millä todennäköisyydellä kaikilla renkailla on niille suositeltu pyörimissuunta?

A3 Olkoon $f(x) = |2x - 6|$.

(a) Laske $\int_0^4 f(x)\,dx$.

(b) Määritä funktion f se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(3, 0)$ kautta.

A4 Tarkastellaan kolmiota ABC. Pisteet P, Q, R jakavat kolmion sivut suhteessa

$$|\overline{AP}| : |\overline{AB}| \quad = \quad |\overline{BQ}| : |\overline{BC}| \quad = \quad |\overline{CR}| : |\overline{CA}| \quad = \quad 2 : 3\,.$$

Olkoon O jokin kiinteä piste. Merkitään

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{OA}, & \overline{b} &= \overline{OB}, & \overline{c} &= \overline{OC}, \\ \overline{p} &= \overline{OP}, & \overline{q} &= \overline{OQ}, & \overline{r} &= \overline{OR}. \end{aligned}$$

(a) Ratkaise $\overline{p}$ vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

(b) Osoita laskemalla, että $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$.

A5 Kolme vetokoiraa, pisteissä $K_1 = (3, 1)$, $K_2 = (0, -1)$ ja $K_3 = (-2, 0)$, ovat jousella kiinni samasta kiinnityslenkistä. Kiinnityslenkki liukuu vapaasti pitkin suoraa vaijeria, jonka päät ovat pisteissä $P = (0, 0)$ ja $Q = (1, -2)$.

Mihin pisteeseen kiinnityslenkki asettuu, kun vetokoirien etäisyyksien neliöiden summa lenkistä (eli jousien potentiaalienergia) minimoituu?

A6 Laske tarkka arvo lausekkeelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)$, jossa $n = 1000$ ja

(a) $a_k = 2^k$,

(b) $a_k = k2^k$.

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 Ett företag säljer 60000 stycken gatlyckor per år. Lyktornas inköpspris är 430 €/styck. Med fabriken kommer man överens om en fix storlek på n stycken lyktor för alla beställningssatser. Företagets lagerutrymme anpassas till beställningssatsen och för lagerutrymmet betalar man $24\,n$ €/år. Leveransen av en beställningssats från fabriken kostar 961 € oberoende av satsens storlek. En ny sats beställs så att den inte anländer innan den tidigare satsen i sin helhet har levererats från lagret till kunden.

(a) Hur högt borde gatlyktornas försäljningspris i euron och cent vara för att täcka de ovan nämnda kostnaderna, om $n = 5000$?

(b) Hur stor borde beställningssatsen storlek n vara för att kostnaderna skall minimeras?

A2 Ett bilhjul består av ett däck som sätts på en fälg. Bildäcket har en rekommenderad rotationsriktning. Fälgarna kan endast monteras på bilen med “insidan” mot bilen, men däcken kan monteras på fälgarna i bägge riktningarna. Fram- och bakhjul är likadana.

(a) De fyra hjulen hos en bil har monteras av för underhåll. Nu skall de dock sättas tillbaka så att alla däcken bibehåller den rekommenderade rotationsriktningen. Med vilken sannolikhet inträffar detta, om hjulen sätts tillbaka slumpmässigt?

(b) Fyra däck sätt på fälgarna och hjulen monteras på bilen - alla operationerna görs slumpmässigt och oberoende av varandra. Med vilken sannolikhet har alla däcken den rekommenderade rotationsriktningen?

A3 Låt $f(x) = |2x - 6|$.

(a) Beräkna $\int_0^4 f(x)\,dx$.

(b) Bestäm den integralfunktionen till funktionen f, vars graf går genom punkten $(3, 0)$.

A4 Vi studerar triangeln ABC. Punkterna P, Q, R delar triangels sidor i förhållandena

$$|\overline{AP}| : |\overline{AB}| \quad = \quad |\overline{BQ}| : |\overline{BC}| \quad = \quad |\overline{CR}| : |\overline{CA}| \quad = \quad 2:3\,.$$

Låt O vara en fix punkt. Beteckna

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{OA}, & \overline{b} &= \overline{OB}, & \overline{c} &= \overline{OC}, \\ \overline{p} &= \overline{OP}, & \overline{q} &= \overline{OQ}, & \overline{r} &= \overline{OR}. \end{aligned}$$

(a) Uttryck $\overline{p}$ med hjälp av vektorerna $\overline{a}$ och $\overline{b}$.

(b) Visa med hjälp av beräkningar, att $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$.

A5 Tre draghundar i punkterna $K_1 = (3, 1)$, $K_2 = (0, -1)$ och $K_3 = (-2, 0)$, är fästa via fjädrar i en ring. Ringen kan glida fritt längs en rak vajer, vars ändor är i punkterna $P = (0, 0)$ och $Q = (1, -2)$.

I vilken punkt kommer ringen att vara, då summan av kvadraterna av draghundarnas avstånd från ringen (dvs. fjädarnas potentiella energi) minimeras?

A6 Beräkna exakta värdet av uttrycket $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k)$, då $n = 1000$ och

(a) $a_k = 2^k$,

(b) $a_k = k2^k$.

Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps.* Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted.

Allowed instruments: Writing instruments, non–programmable calculators, non–electronic general-language dictionaries to/from English. **Attachment:** Table of formulae.

A1 A company sells street lighting 60000 pieces a year. The purchase price of a lighting is 430 €/piece. The company agrees with the factory a fixed order size of n pieces for all orders. The warehouse of the company is built to store this order patch and the warehouse costs $24\,n$ €/year. The delivery of a patch has a fixed cost of 961 € independent of the order size. A new patch is ordered to arrive only when the entire previous patch has been delivered to the customer.

(a) What should the selling price a piece be in euros and cents to cover the above mentioned costs, given $n = 5000$?

(b) What should the patch size n be to minimize the costs?

A2 A car wheel comprises a tyre mounted on a rim. A car wheel has a recommended direction of rotation. A rim can be fit on a car only "inside" towards the car, a tyre on rim either way. The front and back wheels are alike.

(a) The four wheels of the car has been demounted for car's service. The wheels should be mounted back preserving the recommened direction of rotation. At what propability will this happen, as wheels are mounted in random?

(b) Four tyres are mounted on four rims and wheels then on the car. Each step is done in a random fashion. On what propability will car's all tyres be mounted in the recommended direction of rotation?

A3 Let $f(x) = |2x - 6|$.

(a) Calculate $\int_0^4 f(x)\,dx$.

(b) Determine the integral function of the function f, whos graph contains the point $(3, 0)$.

A4 Consider the triangle ABC. The points P, Q, R divide the sides of the triangle in proportion

$$|\overline{AP}| : |\overline{AB}| \quad = \quad |\overline{BQ}| : |\overline{BC}| \quad = \quad |\overline{CR}| : |\overline{CA}| \quad = \quad 2:3\,.$$

Let O be some point. Denote

$$\begin{array}{lll} \overline{a} = \overline{OA}, & \overline{b} = \overline{OB}, & \overline{c} = \overline{OC}, \\ \overline{p} = \overline{OP}, & \overline{q} = \overline{OQ}, & \overline{r} = \overline{OR}. \end{array}$$

(a) Solve $\overline{p}$ in a combination of vectors $\overline{a}$ and $\overline{b}$.

(b) Show, by calculating, that $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$.

A5 Three huskies, in points $K_1 = (3, 1)$, $K_2 = (0, -1)$ and $K_3 = (-2, 0)$, are attached each to a suspension ring by a string. The ring moves freely along a straight cable, that has ends on points $P = (0, 0)$ and $Q = (1, -2)$.

At which point will ring settle if there the sum of the squares of the distances between the huskies and the ring (i.e. the potential energy) is minimized?

A6 Calculate the exact value for the expression $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k)$, given $n = 1000$ and

(a) $a_k = 2^k$,

(b) $a_k = k2^k$.

Diplomi-insinöörien ja arkkitehtien dia-yhteisvalinta 2010, Insinöörivalinnan matematiikankoe
Diplomingenjörs- och arkitektutbildningens gemensamma dia-antagning 2010, Ingenjörurvals matematikprov
Common University Admission in Engineering and Architecture (dia-admission) 2010, Engineering mathematics

Kaavakokoelma
Formelsamlig
Table of Formulae

Analyysi/Analys/Analysis

$a, b > 0$

$a^x = e^{x \ln a}$

$a^{x+y} = a^x a^y$

$\log a^b = b \log a$

$\log ab = \log a + \log b$

$\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$

Trigonometria/Trigonometri/Trigonometry

$\sin x = -\sin(-x) = \quad \sin(\pi - x)$

$\cos x = \quad \cos(-x) = -\cos(\pi - x)$

$\tan x = -\tan(-x) = -\tan(\pi - x)$

$\sin x = \cos(\dfrac{\pi}{2} - x)$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cot x}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\quad = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Derivointi/Derivering/Differentiation

α, β vakioita/konstanter/constants.

$Df(x) := \dfrac{d}{dx} f(x) =: f'(x)$

$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

$(f\,g)' = f\,g' + f'\,g$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g\,f' - f\,g'}{g^2}$

$(\,g(f)\,)' = g'(f)\,f'$

$\dfrac{d}{dy} f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x), \quad f^{-1}(f(x)) = x$

$Dx^\alpha = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

$De^x = e^x$

$D\alpha^x = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0$

$D \ln |x| = \dfrac{1}{x}$

$D \log_\alpha |x| = \dfrac{1}{x \ln \alpha}, \quad \alpha > 0 \,\wedge\, \alpha \neq 1$

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D \tan x = 1 + \tan^2 x$

Integrointi/Integrering/Integration

α, β vakioita/konstanter/constants.

$\displaystyle\int \alpha f(x) + \beta g(x)\; dx = \alpha \int f(x)\; dx + \beta \int g(x)\; dx$

$\displaystyle\int f(x)' g(x)\; dx = f(x)g(x) - \int g(x)' f(x)\; dx$

$\displaystyle\int g'(f(x))\; f'(x)\; dx = g(f(x)) + C$

$\displaystyle\int x^{n-1}\; dx = \frac{x^n}{n} + C, \quad n \neq 0$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\; dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

$\displaystyle\int \alpha^x\; dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C, \quad \alpha > 0 \,\wedge\, \alpha \neq 1$

$\displaystyle\int \sin x\; dx = -\cos x + C$

$\displaystyle\int \cos x\; dx = \sin x + C$

$\displaystyle\int \tan x\; dx = -\ln|\cos x| + C$

Vektorit/Vektorer/Vectors

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_2 = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\, \cos\angle(\bar{a}, \bar{b})$

$|\bar{a}|^2 = \bar{a} \cdot \bar{a}$

$\bar{a}_b = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}\, \bar{b}$

Tehtävä 1

(a) Merkitään vuosimyyntiä m, valaisimen hintaa h, eräkustannusta a, varastointikustannusta c kappaletta kohden. n on siis eräkoko. Kustannukset valaisinta kohden ovat vähintään

$$P(n) = h + a/n + cn/m$$

(b) Vastaavasti voidaan tarkastella keskimääräistä vuosikustannusta

$$C(n) = mP(n) = hm + am/n + cn, \quad n \geq 1$$

Tarkastellaan vastaavan reaaliluvuilla määritellyn funktion xminimointia

$$C'(x) = -am/x^2 + c = 0.$$

$$x_* = \sqrt{\frac{am}{c}}$$

$C' < 0$ ennen ja $C' > 0$ jälkeen kriittisen pisteen ($C'' > 0$), joten vastaavasti C vähenevä ja kasvava.
Koska x_* on kokonaisluku, on tämä myös tehtävän tarkoittama minimipiste $n = x_*$. (Jos kyseessä ei olisi kokonaisluku pitäisi tarkastella kumpikin kokonaisluku saadun arvon vieressä.)

	A	B	C	D
(a)	$m = 60000$	$m = 70000$	$m = 80000$	$m = 90000$
	$h = 430$	$h = 430$	$h = 430$	$h = 430$
	$c = 24$	$c = 28$	$c = 32$	$c = 36$
	$a = 961$	$a = 1024$	$a = 1369$	$a = 1156$
	$n = 5000\ldots$	$n = 5000\ldots$	$n = 5000\ldots$	$n = 5000\ldots$
	$P = 432{,}1922$	$P = 432{,}2048$	$P = 432{,}2738$	$P = 432{,}2312$
	hinta $\geq 432{,}20$	hinta $\geq 432{,}21$	hinta $\geq 432{,}28$	hinta $\geq 432{,}24$
(b)	$n = 1550$	$n = 1600$	$n = 1850$	$n = 1700$

Arvostelu: Osakohdat arvostellaan 2p+4p.

Kohdassa b) oikeasta C:n lausekeesta hyvitetään 1p, kriittisestä pisteestä x_* lisäksi 2p.

Mikäli vaadittu pyöristys vastauksessa kohdassa a) ei ole tehty ylöspäin (kyseessä alaraja), tehtävästä annetaan korkeintaan 5p.

Tehtävä 2

(a) Tiedetään, että pyöriä on ollut kaksi vasemman puolen ja kaksi oikean puolen pyörää (kiertosuunta määrittelee puolen). Pyörät onnistutaan laittamaan paikalleen tarkalleen jos toisen puolen (sanotaan vasemman) pyörät onnistutaan laittamaan paikalleen oikein: $p = \frac{2}{4}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

(b) Koska pyörien valinta ja renkaiden asennus vanteille ovat riippumattomia, voidaan ajatella todennäköisyyttä muuttamatta, että asennettavat pyörät valitaan joukosta jo asennettuja renkaita. Todennäköisyys sille, että kukin rengas asennetaan oikein vanteelle paikka huomioon ottaen on $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, mikä on myös kysytty todennäköisyys.

Vaihtoehtoisesti: Pyörästä tulee satunnaisella renkaan asennuksella vanteelle todennäköisyydellä 1/2 oikean (vastaavasti vasemman) puolen pyörä. Tehtävän onnistuminen edellyttää, että vasemman puolen pyöriä tehdään tarkalleen kaksi kappaletta, vastaava todennköisyys $q = \binom{4}{2}\frac{1}{2^4} = \frac{3}{8}$. Tämän lisäksi pyörät pitää asentaa paikoilleen kuten kohdassa (a). Kysytty todennäköisyys on riippumattomien todennäköisyyksien tulo $pq = \frac{1}{16}$.

Arvostelu: Alakohdat 3p+3p. Kummassakin alakohdassa edellytetään julkituotuja perusteluja laskutavalle. Ilman riittäviä perusteluja vastauksesta hyvitetään 1p kummassakin kohdassa.

Tehtävä 3

Merkitään $g(x) = ax - b$ ja $c = b/a$ jolloin $g(c) = 0$. Koska $a > 0$, niin $g(x) \geq 0$, kun $x \geq c$. Niinpä

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq c \\ -g(x), & x \leq c \end{cases}$$

(a) Määritellään $G(x) = \int_c^x g(s)ds = \frac{1}{2}ax^2 - bx - \frac{1}{2}ac^2 + bc$ jolloin

$$\begin{aligned} I &= \int_0^d f(x)\,dx \\ &= \int_0^c -g(x)\,dx + \int_c^d g(x)\,dx \\ &= -\underbrace{G(c)}_{=0} + G(0) + G(d) - \underbrace{G(c)}_{=0} \end{aligned}$$

(b) Asetetaan

$$F(x) = \begin{cases} G(x), & x \geq c \\ -G(x), & x < c \end{cases}$$

jolloin

$$F'(x) = \begin{cases} g(x), & x > c \\ -g(x), & x < c \end{cases} = f(x)$$

ja toisaalta funktio on jatkuva, koska

$$\lim_{x \to c+} F(x) = G(c) = 0 = -G(c) = \lim_{x \to c-} F(x).$$

Selvästi kuvaaja sisältää pisteen $(c, 0)$.

A	B	C	D
a=2 b=6 c=3	a=4 b=8 c=2	a=2 b=12 c=6	a=4 b=12 c=3
$G = x^2 - 6x + 9$	$G = 2x^2 - 8x + 8$	$G = x^2 - 12x + 36$	$G = 2x^2 - 12x + 18$
$I = 10$ $d = 4$	$I = 10$ $d = 3$	$I = 37$ $d = 7$	$I = 20$ $d = 4$

Arvostelu: Funktion f:n itseisarvolausekkeen purkaminen alueisiin +1p. Määrätyn integraalin jako $\int_0^d = \int_0^c + \int_c^d$ ja numeerinen vastaus, I, antavat kumpikin +1p.

Integraalifunktion oikea muoto +1p määräämättömine vakioineen, vakioiden määräämistä +2p. (Mallivastauksessa vakioiden määräytyvät implisiittisti.) Integraalifunktion käsitteleminen ilman määrittelyaluetta on arvotonta.

Tehtävä 4

(a) Merkitään annettua suhdetta s: $|\overline{AP}| = s|\overline{AB}|$. Niinpä $\overline{AP} = s\overline{AB} = s(\overline{b} - \overline{a})$ jolloin

$$\overline{p} = \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{a} + s(\overline{b} - \overline{a}) = (1 - s)\overline{a} + s\overline{b}$$

(b) saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \overline{p} &= (1-s)\overline{a} + s\overline{b} \\ \overline{q} &= (1-s)\overline{b} + s\overline{c} \\ \overline{r} &= (1-s)\overline{c} + s\overline{a} \\ \overline{p} + \overline{q} + \overline{r} &= (1-s+s)\overline{a} + (1-s+s)\overline{b} + (1-s+s)\overline{c} \\ &= \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \end{aligned}$$

A	B	C	D
$s = 2:3$	$s = 3:4$	$s = 2:3$	$s = 3:4$
$\overline{p} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b}$	$\overline{p} = \frac{1}{4}\overline{a} + \frac{3}{4}\overline{b}$	$\overline{p} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b}$	$\overline{p} = \frac{1}{4}\overline{a} + \frac{3}{4}\overline{b}$

Arvostelu: Alakohdat 3p+3p.

Kohdassa (a) käsittely, jossa tulkittu tehtävänannosta poikkeavasti $|AP| : |PB| = s$ voidaan arvostella korkeintaan 2p arvoiseksi.

Kohta (b): Kaikki p, q, r ilmaistu a, b avulla oikein +1p. Todistelussa vaaditaan huolellista rigiditeettiä, joka askeleen on oltava loogisesti pitävä.

Tehtävä 5

1) Otetaan käyttöön parametri $0 \leq \alpha \leq 1$. Pisteelle R janalla PQ pätee

$$R = (1-\alpha)P + \alpha Q$$

$$d(\alpha) := |K_1 - R|^2 + |K_2 - R|^2 + |K_3 - R|^2$$

Asettamalla $d'(\alpha_0) = 0$ ja toteamalla, että $d(\alpha_0) < d(0) < d(1)$, näemme, että kysytty minimipiste janalla on PQ on $R(\alpha_0)$.

2) Vaihtoehtoisesti: Derivointi suoraan neliölausekkeista sieventämättä. Samoin minimi voidaan perustella suoralla: Koska $\lim_{|\alpha|\to\infty} |d(\alpha)| = \infty$ saavutetaan minimi <u>suoralla</u> PQ jossakin kriittisessä pisteessä ja pätee

$$d(\alpha_0) = \min_{\alpha \in \mathcal{R}} d(\alpha) \leq \min_{0 \leq \alpha \leq 1} d(\alpha)$$

Toisaalta $0 \leq \alpha_0 \leq 1$ on ainoa kriittinen piste piste on samalla minimi <u>janalla</u> PQ.

A	B	C	D
$R = (1\alpha, -2\alpha)$	$R = (-2\alpha, 1\alpha)$	$R = (-1\alpha, 2\alpha)$	$R = (2\alpha, -1\alpha)$
$d(\alpha) =$	$d(\alpha) =$	$d(\alpha) =$	$d(\alpha) =$
$(+3-1\alpha)^2$	$(+1+2\alpha)^2$	$(-3+1\alpha)^2$	$(-1-2\alpha)^2$
$+(+1+2\alpha)^2$	$+(+3-1\alpha)^2$	$+(-1-2\alpha)^2$	$+(-3+1\alpha)^2$
$+(+0-1\alpha)^2$	$+(-1+2\alpha)^2$	$+(0+1\alpha)^2$	$+(+1-2\alpha)^2$
$+(-1+2\alpha)^2$	$+(+0-1\alpha)^2$	$+(+1-2\alpha)^2$	$+(0+1\alpha)^2$
$+(-2-1\alpha)^2$	$+(+0+2\alpha)^2$	$+(+2+1\alpha)^2$	$+(0-2\alpha)^2$
$+(+0+2\alpha)^2$	$+(-2-1\alpha)^2$	$+(0-2\alpha)^2$	$+(+2+1\alpha)^2$
$= 15\alpha^2 - 2\alpha + 15$	$= 15\alpha^2 - 2\alpha + 15$	$= 15\alpha^2 - 2\alpha + 15$	$= 15\alpha^2 - 2\alpha + 15$
$d'(\alpha_0) = 30\alpha_0 - 2$	$d'(\alpha_0) = 30\alpha_0 - 2$	$d'(\alpha_0) = 30\alpha_0 - 2$	$d'(\alpha_0) = 30\alpha_0 - 2$
$\alpha_0 = 1/15$	$\alpha_0 = 1/15$	$\alpha_0 = 1/15$	$\alpha_0 = 1/15$
$d(\alpha_0) = 14{,}9333$	$d(\alpha_0) = 14{,}9333$	$d(\alpha_0) = 14{,}9333$	$d(\alpha_0) = 14{,}9333$
$d(0) = 15$	$d(0) = 15$	$d(0) = 15$	$d(0) = 15$
$d(1) = 28$	$d(1) = 28$	$d(1) = 28$	$d(1) = 28$
$R(\alpha_0) = (\frac{1}{15}, \frac{-2}{15}) = (0{,}0666\ldots, -0{,}133\ldots)$	$R(\alpha_0) = (\frac{-2}{15}, \frac{1}{15}) = (-0{,}133\ldots, 0{,}0666\ldots)$	$R(\alpha_0) = (\frac{-1}{15}, \frac{2}{15}) = (-0{,}0666\ldots, 0{,}133\ldots)$	$R(\alpha_0) = (\frac{2}{15}, \frac{-1}{15}) = (0{,}133\ldots, -0{,}0666\ldots)$

Arvostelu: Janan yhtälöstä ei hyvitetä. $d(x, y)$ muodostaminen , $d(\alpha)$ muodostaminen (yksiparametrimuoto) , $d'(\alpha)$ sieventäminen yhteensä 3p. α_0 ratkaiseminen 1p. Optimin perustelu ja ratkaisu oikeassa muodossa loput 2p. Optimin perustelussa on jossakin muodossa jossakin kohdassa tehtävää käytävä ilmi millä välillä parametria on käsitelty (vrt $0 \leq \alpha \leq 1$ mallivastauksessa).

Tehtävä 6

Yhdistämällä termeittäin

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-a_k + a_{k+1})$$
$$= -a_0 + \underbrace{a_1 \quad - a_1 + a_2 \quad - a_2 \cdots + a_n \quad - a_n}_{=0} + a_{n+1} = -a_0 + a_{n+1}$$

Siis

(a) $a_{n+1} = 2^{1001}$, $a_0 = 1$, $\quad S_{1000} = 2^{1001} - 1 \approx 2.143 \cdot 10^{301}$

(b) $a_{n+1} = 1001 \cdot 2^{1001}$, $a_0 = 0$, $\quad S_{1000} = 1001 \cdot 2^{1001} \approx 2.145 \cdot 10^{304}$

Kohdassa a) vaihtoehto 1:

$$-a_k + a_{k+1} = 2^{k+1} - 2^k = (2-1)2^k = 2^k,$$

joten kyseessä on geometrinen summa

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

Kohdassa a) vaihtoehto 2: Kyseessä on kaksi geometrista summaa

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} -a_k + a_{k+1} = -\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = -\frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{2-2^{n+2}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$$

Arvostelu: Alakohdat 3p+3p.

Kohdassa a) voidaan myös näyttää, että kyseessä on geometrinen sarja ja laskea tulos tätä käyttämällä. Tässä edellytetään kuitenkin pitävää päättelyä: laskemalla osan termeistä ($k = 1, 2, 3$) ei luoda perustetta väitteelle, että kyse on geometrisesta sarjasta.

Vastauksissa ei edellytetä likiarvoa.