Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 Ratkaise yhtälöt

(a) $x - \frac{10}{x} = 3$

(b) $4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 9$

(c) $\sin x = 1 - \cos^2 x, \quad 0 \le x \le \pi$

A2 Nesteet A ja B on sekoitettu yhteen. Nesteen A osuus seoksen painosta on p ja osuus tilavuudesta q.

(a) Mikä on nesteiden A ja B tiheyksien suhde?

(b) Olkoot $p = 31\%$, $q = 37\%$ ja seoksen tiheys 0.889 kg/dm^3. Mitkä ovat nesteiden A ja B tiheydet? Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella.

A3 Laskeutumisen alkaessa lentokone lentää vaakasuoraan. Tällöin kone on korkeudella $y = h$ ja vaakasuoralla etäisyydellä $x = s$ kiitoradasta. Kone koskettaa kiitorataa origossa vaakalennossa.

Oletetaan, että laskeutumisen aikana

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Kuinka korkealla kone on, kun sen vaakasuora etäisyys kiitoradasta on $\frac{1}{3}s$?

A4 Robottikäsi muodostuu kahdesta vaakatasossa liikkuvasta varresta OP ja PQ. Varsilla on yhteinen nivel P. Käden piste O on kiinnitetty origoon. Varsien pituudet ovat $|OP| = 3$ ja $|PQ| = 5$.

(a) Käden tarttumapiste Q on pisteessä $(-1, 3)$. Missä on nivelpiste P?

(b) Kättä liikutetaan siten, että tarttumapiste Q siirtyy lyhintä mahdollista reittiä pisteestä $(-3, 2)$ pisteeseen $(2, 0)$. Kuinka pitkän matkan Q kulkee?

A5 Vuonna 2011 uudentyyppisen influenssaviruksen aiheuttama sairastumistodennäköisyys on kaikilla 20%. Yleisesti henkilön alttius sairastua tarkasteltavana vuonna riippuu hänen hankkimastaan immuniteetista:

Jos henkilö on ollut sairas tarkasteltavaa vuotta edeltävänä vuonna, on hänen todennäköisyytensä sairastua tarkasteltavana vuonna 30% edellisen vuoden vastaavasta todennäköisyydestä.

Jos henkilö on ollut terve tarkasteltavaa vuotta edeltävän vuoden, on hänen todennäköisyytensä pysyä terveenä koko tarkasteltava vuosi 45% edellisen vuoden vastaavasta todennäköisyydestä.

(a) Henkilö ei sairasta vuonna 2011. Millä todennäköisyydellä hän sairastaa vuonna 2012?

(b) Henkilö ei sairasta vuonna 2011. Millä todennäköisyydellä hän sairastaa vuonna 2013?

A6 Käyrän $y = f(x)$ kaarenpituus, K, välillä $a \le x \le b$ on

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Laske käyrän $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln|x|)$ kaarenpituus välillä $-2 \le x \le -1$.

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 Lös ekvationerna

(a) $x - \frac{10}{x} = 3$

(b) $4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 9$

(c) $\sin x = 1 - \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

A2 Vätskorna A och B har blandats ihop. A:s andel av blandningens vikt är p och dess andel av blandningens volym är q.

(a) Vad är förhållandet mellan vätskorna A:s och B:s densiteter?

(b) Antag att $p = 31\%$, $q = 37\%$ och blandningens densitet 0.889 kg/dm^3. Vad är vätskorna A:s och B:s densiteter? Ge svaren med tre decimalers noggrannhet.

A3 I början av landningen flyger ett flygplan horisontellt. Då är planet på höjden $y = h$ och på horisontella avståndet $x = s$ från landningsbanan. Planet vidrör landningsbanan i origo flygande horisontellt.

Antag att under landningen

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Hur högt är planet, då dess horisontella avstånd från landningsbanan är $\frac{1}{3}s$?

A4 En robotarm består av två stag OP och PQ, som rör sig horisontellt. Stagen har en gemensam led P. Armens punkt O är fäst vid origo. Stagens längder är $|OP| = 3$ och $|PQ| = 5$.

(a) Robotarmens griphand Q är i punkten $(-1, 3)$. Var finns leden P?

(b) Armen rörs så att griphanden Q förflyttas kortast möjliga vägen från punkten $(-3, 2)$ till punkten $(2, 0)$. Hur lång sträcka rör sig Q?

A5 Sannolikheten att insjukna år 2011 i influensa som förorsakas av en ny typ av virus är 20% för alla. I allmänhet beror en individs benägenhet att insjukna ett givet år på den immunitet han hunnit skaffa sig:

Om en individ varit sjuk föregående år, är hans sannolikhet att insjukna innehavande året 30% av föregående års motsvarande sannolikhet.

Om en individ varit frisk under hela föregående år, är hans sannolikhet att förbli frisk hela innehavande året 45% av föregående års motsvarande sannolikhet.

(a) En individ insjuknar inte under år 2011. Med vilken sannolikhet insjuknar han år 2012?

(b) En individ insjuknar inte under år 2011. Med vilken sannolikhet insjuknar han år 2013?

A6 Båglängden K hos kurvan $y = f(x)$ i intervallet $a \leq x \leq b$ ges av

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Beräkna båglängden hos kurvan $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln|x|)$ i intervallet $-2 \leq x \leq -1$.

Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps.* Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted.

Allowed instruments: Writing instruments, non–programmable calculator; no dictionaries allowed. **Attachment:** Table of formulae.

A1 Solve the equations for x

(a) $x - \frac{10}{x} = 3$

(b) $4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 9$

(c) $\sin x = 1 - \cos^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

A2 Liquids A and B have been mixed together. Liquid A makes up share p of the weight and share q of the volume of the mixture.

(a) What is the ratio of densities of liquids A and B?

(b) Let $p = 31\%$, $q = 37\%$ and density of the blend $0.889\ \mathrm{kg/dm^3}$. What are densities of the liquids A and B? Give the answers to three decimals of accuracy.

A3 At the start of the landing a plane flies horizontally. At that moment the plane is at a height $y = h$ and at a horizontal distance $x = s$ from the runway. The plane touches the runway flying horizontally.

We assume that during the landing

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

At what height does the plane fly, when the horizontal distance from the runway is $\frac{1}{3}s$?

A4 The arm of a robot comprises two bars OP and PQ moving horizontally. The bars share joint P. The arm is fixed at the origin at the point O. The bars have the length $|OP| = 3$ and $|PQ| = 5$.

(a) The grabbing end Q is at $(-1, 3)$. Where is joint P?

(b) The arm is moved so that the grabbing end Q travels the shortest possible route from point $(-3, 2)$ to point $(2, 0)$. How long a route does Q travel?

A5 In year 2011 everybody's probability to fall ill with the new type of influenza is 20%. In general, a person's probability to fall ill during any given year depends on the immunity he has obtained:

If a person has been ill during the year preceding the given year, his probability to fall ill during the given year is 30% of the corresponding probability the preceding year.

If a person has been healthy the entire year preceding the given year, his probability to stay healthy the given year is 45% of the corresponding probability the preceding year.

(a) A person has not been ill during 2011, at what probability will he fall ill during 2012?

(b) A person has not been ill during 2011, at what probability will he fall ill during 2013?

A6 The arc length K of the curve $y = f(x)$ on the interval $a \leq x \leq b$ is

$$K = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Calculate the arc length of the curve $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln|x|)$ on the interval $-2 \leq x \leq -1$.

Kaavakokoelma
Formelsamlig
Table of Formulae

Analyysi/Analys/Analysis

$a, b > 0$

$a^x = e^{x \ln a}$

$a^{x+y} = a^x a^y$

$\log a^b = b \log a$

$\log ab = \log a + \log b$

$\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$

Trigonometria/Trigonometri/Trigonometry

$\sin x = -\sin(-x) = \quad \sin(\pi - x)$

$\cos x = \quad \cos(-x) = -\cos(\pi - x)$

$\tan x = -\tan(-x) = -\tan(\pi - x)$

$\sin x = \cos(\dfrac{\pi}{2} - x)$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cot x}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\quad = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Derivointi/Derivering/Differentiation

α, β vakioita/konstanter/constants.

$Df(x) := \dfrac{d}{dx} f(x) =: f'(x)$

$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

$(f\,g)' = f\,g' + f'\,g$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g\,f' - f\,g'}{g^2}$

$(\,g(f)\,)' = g'(f)\,f'$

$\dfrac{d}{dy} f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x), \quad f^{-1}(f(x)) = x$

$Dx^\alpha = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

$De^x = e^x$

$D\alpha^x = \alpha^x \ln \alpha, \quad \alpha > 0$

$D \ln|x| = \dfrac{1}{x}$

$D \log_\alpha |x| = \dfrac{1}{x \ln \alpha}, \quad \alpha > 0 \ \wedge \ \alpha \neq 1$

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D \tan x = 1 + \tan^2 x$

Integrointi/Integrering/Integration

α, β vakioita/konstanter/constants.

$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$

$\int f(x)' g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int g(x)' f(x)\, dx$

$\int g'(f(x))\, f'(x)\, dx = g(f(x)) + C$

$\int x^{n-1}\, dx = \dfrac{x^n}{n} + C, \quad n \neq 0$

$\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

$\int \alpha^x\, dx = \dfrac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C, \quad \alpha > 0 \ \wedge \ \alpha \neq 1$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

Vektorit/Vektorer/Vectors

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_2 = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos \angle(\bar{a}, \bar{b})$

$|\bar{a}|^2 = \bar{a} \cdot \bar{a}$

$\bar{a}_b = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}\, \bar{b}$

Tehtävä 1

(a) Lähtökohta $x - a/x = b$, jossa siis määrittelyalueena $x \neq 0$,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}(x^2 - bx - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}.$$

(b) Ratkaistaan edellisen kaltaisesti sijoituksella $y = 2^x$

$$a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} = 9 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{y}(ay^2 - 9y + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4ab}}{2a}$$

josta x (formaalisti $x = \log_2 y$).

(c) Kun $0 \leq x \leq \pi$

$$\sin x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \;\Leftrightarrow\; \sin x(1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \sin x = 0 \vee \sin x = 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}.$$

	A	B	C	D
(a)	$x - \frac{10}{x} = 3$	$x - \frac{15}{x} = 2$	$x - \frac{10}{x} = 3$	$x - \frac{15}{x} = 2$
	$a = 10,\ b = 3$	$a = 15,\ b = 2$	$a = 10,\ b = 3$	$a = 15,\ b = 2$
	$x = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$	$x = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$	$x = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$	$x = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$
(b)	$4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 9$	$2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 9$	$4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 9$	$2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 9$
	$a = 2,\ b = 4$	$a = 4,\ b = 2$	$a = 2,\ b = 4$	$a = 4,\ b = 2$
	$y = 2^x = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$	$y = 2^x = \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$	$y = 2^x = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$	$y = 2^x = \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$
	$x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$	$x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$	$x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$	$x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$
(c)	$x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}.$	$x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}.$	$x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}.$	$x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}.$

Tehtävä 2

Merkitään koko sekoituksen massa m, tilavuutta V, tiheyttä $\rho = m/V$. Merkinnät aineille A ja B vastaavasti alaindeksein.

$$V_A = qV, \qquad V_B = (1-q)V$$

$$m_A = pm, \qquad m_B = (1-p)m$$

joten

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} = \frac{pm}{qV} = \frac{p}{q}\rho,$$

$$\rho_B = \frac{m_B}{V_B} = \frac{(1-p)m}{(1-q)V} = \frac{1-p}{1-q}\rho$$

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{p(1-q)}{q(1-p)}$$

A	B	C	D
$p = 31\%$	$p = 31\%$	$p = 32\%$	$p = 32\%$
$q = 37\%$	$q = 34\%$	$q = 34\%$	$q = 37\%$
$\rho = 0.889$	$\rho = 0.813$	$\rho = 0.788$	$\rho = 0.856$
ρ_A	ρ_A	ρ_A	ρ_A
$= 0,74484\ldots$	$= 0,74126\ldots$	$= 0,74165\ldots$	$= 0,74032\ldots$
$\approx 0,745$	$\approx 0,741$	$\approx 0,742$	$\approx 0,740$
ρ_B	ρ_B	ρ_B	ρ_B
$= 0,97367\ldots$	$= 0,84995\ldots$	$= 0,81188\ldots$	$= 0,92394\ldots$
$\approx 0,974$	$\approx 0,850$	$\approx 0,812$	$\approx 0,924$

Tehtävä 3

Mallille

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Tekstistä

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) &&= d && (1)\\ 0 &= y'(0) &&= c && (2)\\ h &= y(s) &&= as^3 + bs^2 + cs + d && (3)\\ 0 &= y'(s) &&= 3as^2 + 2bs + c, && (4) \end{aligned}$$

jossa $s \neq 0$ on vakio. Huomioiden (1) ja (2) saamme

$$b + \frac{3}{2}sa = 0, \qquad h = 3as + 2b = \frac{1}{2}as^3,$$

josta

$$a = -2h/s^3, \quad b = 3h/s^2, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

$$y(x) = [-2\left(\frac{x}{s}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{s}\right)^2]h$$

$$y(ks) = [-2k^3 + 3k^2]h = (3-2k)k^2h$$

A	B	C	D
$y(\frac{1}{3}s)$ $= 7/27h$ $\approx 0,25926h$	$y(\frac{1}{3}s)$ $= 7/27h$ $\approx 0,25926h$	$y(\frac{1}{4}s)$ $= 5/32h$ $\approx 0,15625h$	$y(\frac{1}{4}s)$ $= 5/32h$ $\approx 0,15625h$

Tehtävä 4 - tapa 1

(a) Asetetaan $P = (x, y)$,

$$|PQ|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = 5^2 \qquad (5)$$
$$|OP|^2 = x^2 + y^2 = 3^2 \qquad (6)$$

vähennetään

$$|PQ|^2 - |OP|^2 = 2ax + 2by + a^2 + b^2 = 4^2 \qquad (7)$$

joka on ensimmäistä astetta ja sievenee muotoon $x = x(y)$ tai $y = y(x)$, vertaa (*). Tulos sijoitetaan yhtälöön (6), josta ratkaistaan y tai vastaavasti x-koordinaatti, ja lausekkeesta (*) edelleen pisteen P puuttuva toinen koordinaatti.

(b) Koska $OQ = OP + PQ$ on

$$|OQ| \geq ||OP| - |PQ|| = 2$$

ja piste Q aina siis vähintään etäisyydellä 2 origosta.[a] Kysytyn reitin loppupiste B on mainitun 2-säteisen ympyrän kehällä, joten lyhyimmällä mahdollisella reitillä piste Q siirtyy alkupisteestä A suoraa pitkin mainitun ympyrän kehälle pisteeseen T, ja kehää pitkin neljännesympyrän matkan edelleen pisteeseen B: Kysytty etäisyys on siis $|A \to T \to B| = 3 + \frac{1}{4}2\pi \cdot 2 = 3 + \pi$.

[a] Pituudelle on myös yläraja $|OQ| \leq |OP| + |PQ| = 8$.

A	B	C	D
$Q = (a,b)$	$Q = (a,b)$	$Q = (a,b)$	$Q = (a,b)$
$= (-1,3)$	$= (1,-3)$	$= (-3,1)$	$= (3,-1)$
Yhtälö (7):	Yhtälö (7):	Yhtälö (7):	Yhtälö (7):
$2x - 6y + 10 = 16$	$-2x + 6y + 10 = 16$	$+6x - 2y + 10 = 16$	$-6x + 2y + 10 = 16$
$x = 3(y+1)$ (*)	$x = 3(y-1)$ (*)	$y = 3(x-1)$ (*)	$y = 3(x+1)$ (*)
Yhtälö (6):	Yhtälö (6):	Yhtälö (6):	Yhtälö (6):
$9(y+1)^2 + y^2 = 9$	$9(y-1)^2 + y^2 = 9$	$x^2 + 9(x-1)^2 = 9$	$x^2 + 9(x+1)^2 = 9$
$(5y+9)y = 0$	$(5y-9)y = 0$	$(5x-9)x = 0$	$(5x+9)x = 0$
$P = (+3,0)$	$P = (-3,0)$	$P = (0,-3)$	$P = (0,+3)$
$\vee \quad (-12/5, -9/5)$	$\vee \quad (12/5, 9/5)$	$\vee \quad (9/5, 12/5)$	$\vee \quad (-9/5, -12/5)$
Q liikkuu:	Q liikkuu:	Q liikkuu:	Q liikkuu:
$A = (-3,2)$	$A = (3,2)$	$A = (2,3)$	$A = (2,-3)$
$\to T = (0,2)$	$\to T = (0,2)$	$\to T = (2,0)$	$\to T = (2,0)$
$\to B = (2,0)$	$\to B = (-2,0)$	$\to B = (0,-2)$	$\to B = (0,2)$

Tehtävä 4 - tapa 2

(a) Asetetaan $P = (x, y)$,

$$|PQ|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = 5^2 \quad (8)$$
$$|OP|^2 = x^2 + y^2 = 3^2 \quad (9)$$

ratkaistaan

$$y = \pm\sqrt{3^2 - x^2} \quad (10)$$

joka sijoitetaan yhtälöön (8):

$$|PQ|^2 = (x-a)^2 + (\pm\sqrt{3^2 - x^2} - b)^2 = 5^2$$

$$\pm 2b\sqrt{3^2 - x^2} = a^2 + b^2 - 4^2 - 2ax$$

$$4b^2(9 - x^2) = (a^2 + b^2 - 4^2)^2 + 4a^2x^2 - 4a(a^2 + b^2 - 4^2)x$$

Saadaan polynomiyhtälö $c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$ Ratkaisemalla y (tai x) yhtälöstä (10) saadaan kolme tai neljä potentiaalista ratkaisua - vain kaksi niistä ovat ratkaisuja:

$$P \in \{(x_1, \pm\sqrt{3^2 - x_1^2}), (x_2, \pm\sqrt{3^2 - x_2^2})\}$$

Tarkistamalla mitkä niistä täyttävät ehdot (9) ja (8) saadaan ratkaisut.

A	B	C	D
$Q = (a, b)$ $= (-1, 3)$	$Q = (a, b)$ $= (1, -3)$	$Q = (a, b)$ $= (-3, 1)$	$Q = (a, b)$ $= (3, -1)$
$c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$	$c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$	$c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$	$c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$
$40x^2 - 24x - 288 = 0$	$40x^2 + 24x - 288 = 0$	$40x^2 - 72x = 0$	$40x^2 + 72x = 0$
$5x^2 - 3x - 36 = 0$	$5x^2 + 3x - 36 = 0$	$5x^2 - 9x = 0$	$5x^2 + 9x = 0$
$x_1 = 3$	$x_1 = 12/5$	$x_1 = 9/5$	$x_1 = 0$
$y_1 = \pm 0$	$y_1 = \pm 9/5$	$y_1 = \pm 12/5$	$y_1 = \pm 3$
$x_2 = -12/5$	$x_2 = -3$	$x_2 = 0$	$x_2 = -9/5$
$y_2 = \pm 9/5$	$y_2 = \pm 0$	$y_2 = \pm 3$	$y_2 = \pm 12/5$
$P = (+3, 0)$	$P = (-3, 0)$	$P = (0, -3)$	$P = (0, +3)$
$\vee \quad (-12/5, -9/5)$	$\vee \quad (12/5, 9/5)$	$\vee \quad (9/5, 12/5)$	$\vee \quad (-9/5, -12/5)$

(b) Kuten edellä

Tehtävä 5

Merkitään todennäköisyyksien muutoksia a (uudestaan sairas), b (edelleen terve) ja vuoden 2011 sairastumistodennäköisyyttä p. Merkitään (TSS) tapausta jossa henkilö on ollut terve vuonna 2011 ja sairas vuosina 2012 ja 2013. Vastaavasti (SxS) edustaa tapausta, jossa henkilö on ollut sairas vuosina 2011 ja 2013 ja jompaa kumpaa vuonna 2012.

(a) Ehdollinen todennäköisyys, että henkilö on ollut terve 2012 ehdolla, että hän oli terve 2011, on

$$P(TT\,|\,T) = bP(T) = b(1-p).$$

Kysytty ehdollinen todennäköisyys on komplementtitodennäköisyys

$$P(TS\,|\,T) \;=\; 1 - P(TT\,|\,T) \;=\; 1 - b(1-p) \;=\; 1 - b + bp.$$

(b) Nyt vuonna 2012 henkilö on voinut olla terve tai sairas, joten

$$P(TxS|T) = P(TSS|TS)\,P(TS|T) + P(TTS|TT)\,P(TT|T).$$

Käyttäen osin (a) kohtaa lausumme:

$$\begin{aligned} P(TSS\,|\,TS) &= aP(TS\,|\,T) \\ &= a(1-b(1-p)) \;=\; a(1-b+bp) \\ P(TTS\,|\,TT) &= 1 - P(TTT\,|\,TT) \;=\; 1 - bP(TT\,|\,T) \\ &= 1 - ab(1-b(1-p)) \end{aligned}$$

josta vastaus.

A	B	C	D
$a = 30\%$ $b = 45\%$	$a = 35\%$ $b = 40\%$	$a = 40\%$ $b = 35\%$	$a = 45\%$ $b = 30\%$
$P(S) = p = 20\%$ $P(T) = 1 - p = 0.8$	$P(S) = p = 10\%$ $P(T) = 1 - p = 0.9$	$P(S) = p = 20\%$ $P(T) = 1 - p = 0.8$	$P(S) = p = 10\%$ $P(T) = 1 - p = 0.9$
$P(TT\,|\,T)$ $= 45\% \cdot 0.8 = 0.36$	$P(TT\,|\,T)$ $= 40\% \cdot 0.9 = 0.36$	$P(TT\,|\,T)$ $= 35\% \cdot 0.8 = 0.28$	$P(TT\,|\,T)$ $= 30\% \cdot 0.9 = 0.27$
$P(TTT\,|\,TT)$ $= 45\% \cdot 0.36$ $= 0.162$	$P(TTT\,|\,TT)$ $= 40\% \cdot 0.36$ $= 0.144$	$P(TTT\,|\,TT)$ $= 35\% \cdot 0.28$ $= 0.098$	$P(TTT\,|\,TT)$ $= 30\% \cdot 0.27$ $= 0.081$
$P(TS\,|\,T)$ $= 1 - 0.36 = \mathbf{0.64}$	$P(TS\,|\,T)$ $= 1 - 0.36 = \mathbf{0.64}$	$P(TS\,|\,T)$ $= 1 - 0.28 = \mathbf{0.72}$	$P(TS\,|\,T)$ $= 1 - 0.27 = \mathbf{0.73}$
$P(TSS\,|\,TS)$ $= 30\% \cdot 0.64$ $= 0.192$	$P(TSS\,|\,TS)$ $= 35\% \cdot 0.64$ $= 0.224$	$P(TSS\,|\,TS)$ $= 40\% \cdot 0.72$ $= 0.288$	$P(TSS\,|\,TS)$ $= 45\% \cdot 0.73$ $= 0.3285$
$P(TTS\,|\,TT)$ $= 1 - 0.162$ $= 0.838$	$P(TTS\,|\,TT)$ $= 1 - 0.144$ $= 0.856$	$P(TTS\,|\,TT)$ $= 1 - 0.098$ $= 0.902$	$P(TTS\,|\,TT)$ $= 1 - 0.081$ $= 0.919$
$P(TTS\,|\,TT)P(TT\,|\,T)$ $= 0.838 \cdot 0.36$ $= 0.30168$	$P(TTS\,|\,TT)P(TT\,|\,T)$ $= 0.856 \cdot 0.36$ $= 0.30816$	$P(TTS\,|\,TT)P(TT\,|\,T)$ $= 0.902 \cdot 0.28$ $= 0.25256$	$P(TTS\,|\,TT)P(TT\,|\,T)$ $= 0.919 \cdot 0.27$ $= 0.24813$
$P(TSS\,|\,TS)P(TS\,|\,T)$ $= 0.192 \cdot 0.64$ $= 0.12288$	$P(TSS\,|\,TS)P(TS\,|\,T)$ $= 0.224 \cdot 0.64$ $= 0.14336$	$P(TSS\,|\,TS)P(TS\,|\,T)$ $= 0.288 \cdot 0.72$ $= 0.20736$	$P(TSS\,|\,TS)P(TS\,|\,T)$ $= 0.3285 \cdot 0.73$ $= 0.23981$
$P(TxS\,|\,T)$ $= 0.30168 + 0.12288$ $= \mathbf{0.42456}$ $\approx 42\%$	$P(TxS\,|\,T)$ $= 0.30816 + 0.14336$ $= \mathbf{0.45152}$ $\approx 45\%$	$P(TxS\,|\,T)$ $= 0.25256 + 0.20736$ $= \mathbf{0.45992}$ $\approx 46\%$	$P(TxS\,|\,T)$ $= 0.24813 + 0.23981$ $= \mathbf{0.48794}$ $\approx 49\%$

Tehtävä 6

$$
\begin{aligned}
f' &= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) && (11)\\
1 + (f')^2 &= 1 + [\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})]^2 \\
&= 1 + \frac{1}{4}(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}) \\
&= \frac{1}{4}(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) \\
&= \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{x}\right]^2 \\
K &= \int \sqrt{1 + (f')^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2}\, dx && (12)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} |x + \frac{1}{x}|\, dx && (13)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} (-x - \frac{1}{x})\, dx && (14)\\
&= -\frac{1}{4}\Big|_{-2}^{-1}(x^2 + 2\ln|x|) \\
&= -\frac{1}{4}(1 + 0 - 4 - 2\ln 2) \\
x &= \frac{3 + 2\ln 2}{4} && (15)
\end{aligned}
$$

Vaihtoehtoisesti voi kirjoittaa myös

$$1 + (f')^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} = \left[\frac{x^2 + 1}{2x}\right]^2$$

josta on helppo nähdä, että integrointivälillä $1 \leq x \leq 2$ integrandi $\left|\frac{x^2+1}{2x}\right| = -\frac{x^2+1}{2x}$ koska $x^2 + 1 > 0$ ja $2x < 0$.

Arvostelu

Ohessa huomioita arvosteluperusteista. Arvosteluperusteet soveltuvat sellaisenaan tapaukseen, jossa hakijan vastaus on lähellä mallivastausta. Mallivastaukset on pyritty laatimaan kattamaan mahdollisimman laaja joukko hakijoiden vastauksista.

Arvostelujen yleisperiaatteena kukin vastaus tehtävään sisältää sekä vastauksen kysymykseen että riittävät perustelut. Riittävät perustelut tarkoittavat usein esiin kirjoitettuja välivaiheita. Hakijan kyky perustella vastaus on keskeinen arvosteluperuste ja mittaa soveltuvuutta analyyttisiä kykyjä edellyttävään koulutukseen.

Tehtävä 1

Osakohdista kustakin annetaan 2p.

(a) Laskuvirheet vähentävät pisteitä.

(b) Implisiittinen tai eksplisiittinen sijoitus $y = 2^x$ antaa 1p.

(c) Mikäli yhtälö saatetaan muotoon jossa esintyy vain tuntemattomia vai muodossa $\sin x$ (tai vastaava), ansaitaan 1p.

Kohdissa (b) ja (c) ad hoc -ratkaisuista perusteluineenkaan ei anneta pisteitä, koska ratkaisujen määrää ei voida katsoa tunnetuksi, eikä tapa siis oleellisesti vie vastausta kohden tehtävän oikeaa ratkaisua.

Tehtävä 2

Tehtävä arvostellaan kokonaisuutena: Yhdestä alakohdasta voi, ilman vastausta toiseen alakohtaan, ansaita 4p: Osakohdissa on yhteisiä elementtejä, e.g. lausekkeet suureille m_A, V_A, m_B, V_B, jotka perustellusti muodostettuna ja ristiriidattomasti esitettynä antavat 3p tehtävässä.

[1] Oikeassa vastauksessa yhtälössä (10) täytyy siis olla näkyvissä kummatkin merkit.

Väite $\rho_A = p/q$ on väärin, mutta johtaa oikeaan suhteeseen $\frac{p(1-q)}{q(1-p)}$. Väitteitä $\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{p(1-q)}{q(1-p)}$ tai $\rho_A = \frac{p}{q}\rho$ ei sellaisenaan voida pitää riittävästi perusteltuina ilman välimuotoja.

Huomaa, että tehtävänannon mukaan p on suhteellinen osuus (prosenttiluku), vastaavasti q:lle.

Tehtävä 3

Kunkin vastausmallin ehdon (1),(2),(4),(3) käyttämiNen ratkaisussa antaa 1p kukin. Loput (2p) jakautuvat kertoimien a, b, c, d ratkaisuun (s, h avulla) ja korkeuden laskemiseen annetussa pisteessä.

Tehtävä 4

Osakohdasta voi saada enintään (a) 5p ja (b) 2p, kuitenkin tehtävästä korkeintaan 6p.

(a) tapa 1 Yhtälöstä (5) hyvitetään +1p, yhtälö (6) ei anna pisteitä; *lineaarinen* riippuvuus (7) arvostetaan +2p (tässä ratkaisutavassa ei synny ylimääräisiä ratkaisuja ratkaisutavasta (1) eroten); yhden muuttujan ratkaisu muodossa $y = f(x)$ tai $x = g(y)$ arvostetaan +1p arvoiseksi; oikeasta vastauksesta annetaan viimeinen piste.

Mikäli ratkaisu $P = (3, 0)$ on erikseen osoitettu oikeaksi, hyvitetään muuten selkeästi vaillinaisen vastauksen yhteydessä tästä 1p.

(a) tapa 2 Lauseke $|PQ|^2 = \ldots$ antaa 1p. Yhteys $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ antaa +1p. Edelleen x_1, x_2 ratkaisu +1p, neljä ratkaisukandidaattia, $(x_1, \pm\sqrt{\ })$, ja $(x_2, \pm\sqrt{\ })$, antavat +1p eli näin yhteensä 4p. Oikeiden kahden ratkaisun valinta antaa viimeisen pisteen osiosta.

Jos edellä tarkastellaan vain positiiviratkaisua[1] muotoa $y = +\sqrt{9-x^2}$ jättäen tarkastelematta vaihtoehdon $y = -\sqrt{9-x^2}$, saadaan mahdollisesti vain osa ratkaisuista kandidaattien joukkoon. Tämä on siksi – lopputuloksesta riippumatta – periaatevirhe. Osiosta voi saada tällöin korkeintaan 3/5p jos hakija muuten suorittaa laskut loppuun.

Mikäli ratkaisu $P = (3, 0)$ on erikseen osoitettu oikeaksi, hyvitetään muuten selkeästi vaillinaisen vastauksen yhteydessä tästä 1p.

(b) Tehtävässä on keskeinen huomio, että piste Q ei pääse kahta yksikköä lähemmäs origoa; +1p.

Tehtävä 5

Pisteytys (a) 2p ja (b) 4p.

Alakohdissa tehtävän kannalta relevanteista, oikeista ja selkeästi nimetyistä ehdollisista todennäköisyyksistä hyvitetään yksi piste kustakin, kuitenkin enintään (a) 1p ja (b) 3p. Tällaisia todennäköisyyksiä ovat esimerkiksi $P(TT|T)$ ja $P(TSS|TS), P(TS|T), P(TTS|TT), P(TSS|TS)$.

Tehtävä 6

Pisteet mallivastauksen vaiheiden mukaisesti:
(11)$\rightarrow$ +1p, (12)$\rightarrow$ +2p, (13)$\rightarrow$ +1p,
(14)$\rightarrow$ +1p, (15)$\rightarrow$ +1p.

Huomaa, että $\sqrt{f^2} = |f|$ mielivaltaisella f, eli erityisesti

$$\int_{-2}^{-1} \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2}\, dx \neq \int_{-2}^{-1} (x + \frac{1}{x})\, dx.$$

Mikäli tätä ei ole huomioitu (vastaus negatiivinen) tehtävästä arvostellaan korkeintaan 4p arvoiseksi: pisteet vaiheista (13) ja (14) jäävät pois.