Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. Yleisesti tehtävän ratkaisun tulisi sisältää myös annetun vastauksen perustelut.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 Varastossa on 13 litraa liuosta A suolapitoisuudeltaan 0,04 % ja 5 litraa liuosta B suolapitoisuudeltaan 0,08 %. Näistä sekoitetaan liuosta C, jonka suolapitoisuus on 0,05 %.

(a) Kuinka monta litraa liuoksia A ja B tarvitaan 1 litraan liuosta C?

(b) Kuinka monta litraa liuosta C voidaan valmistaa varastossa olevista määristä?

Anna vastaukset 0,01 litran tarkkuudella.

A2 Hae reaaliset ratkaisut seuraaville yhtälöille:

(a) $(x-3)^3 = x-3$

(b) $\ln(3+x) = 3\ln 3 + \ln x$

A3 Olkoon $f(x) = |x-1| - 2$ ja $g(x) = |f(x)|$.

(a) Millä muuttujan x reaaliarvoilla on $f(x) \geq 0$?

(b) Piirrä funktion $g(x)$ kuvaaja välillä $x \in [-2, 3]$. Määritä kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala mainitulla välillä.

A4 Käyrän $y = 1/x$, $x > 0$ pisteeseen $P = (x_0, y_0)$ piirretty tangentti ja koordinaattiakselit rajaavat kolmion A.

(a) Määritä kolmion A pinta-ala, ja totea, että se on riippumaton pisteestä P.

(b) Miten P on valittava, jotta kolmion A hypotenuusa olisi mahdollisimman lyhyt? Perustele ratkaisusi.

A5 (a) Millä muuttujan t arvolla integraali

$$\int_t^{t+\frac{\pi}{6}} \sin x \, dx$$

saa suurimman arvonsa, kun $0 \leq t \leq \pi$?

(b) Osoita annettuja trigonometrisia kaavoja käyttäen, että edellä mainittu suurin arvo on $2\sin\frac{\pi}{12}$.

A6 Harri Potteri pyrkii 610 cm leveän tien yli. Hänen askeleensa ovat 60 cm pitkiä. Kullakin askeleella hän etenee

- kohtisuoraan tien poikki todennäköisyydellä 0,6,
- kohtisuorasta 60 astetta vasemmalle todennäköisyydellä 0,2,
- kohtisuorasta 60 astetta oikealle todennäköisyydellä 0,2.

Millä todennäköisyydellä Harri pääsee tien toiselle puolelle ottamatta kolmattatoista askelta?

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. Yleisesti tehtävän ratkaisun tulisi sisältää myös annetun vastauksen perustelut.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

B1 Varastossa on 5 litraa liuosta A suolapitoisuudeltaan 0,04 % ja 14 litraa liuosta B suolapitoisuudeltaan 0,08 %. Näistä sekoitetaan liuosta C, jonka suolapitoisuus on 0,07 %.

(a) Kuinka monta litraa liuoksia A ja B tarvitaan 1 litraan liuosta C?

(b) Kuinka monta litraa liuosta C voidaan valmistaa varastossa olevista määristä?

Anna vastaukset 0,01 litran tarkkuudella.

B2 Hae reaaliset ratkaisut seuraaville yhtälöille:

(a) $(x-4)^3 = x-4$

(b) $\ln(5+x) = 3\ln 3 + \ln x$

B3 Olkoon $f(x) = |x-2| - 1$ ja $g(x) = |f(x)|$.

(a) Millä muuttujan x reaaliarvoilla on $f(x) \geq 0$?

(b) Piirrä funktion $g(x)$ kuvaaja välillä $x \in [-1, 3]$. Määritä kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala mainitulla välillä.

B4 Käyrän $y = 1/x$, $x > 0$ pisteeseen $P = (x_0, y_0)$ piirretty tangentti ja koordinaattiakselit rajaavat kolmion A.

(a) Määritä kolmion A pinta-ala, ja totea, että se on riippumaton pisteestä P.

(b) Miten P on valittava, jotta kolmion A hypotenuusa olisi mahdollisimman lyhyt? Perustele ratkaisusi.

B5 (a) Millä muuttujan t arvolla integraali

$$\int_t^{t+\frac{\pi}{5}} \sin x \, dx$$

saa suurimman arvonsa, kun $0 \leq t \leq \pi$?

(b) Osoita annettuja trigonometrisia kaavoja käyttäen, että edellä mainittu suurin arvo on $2\sin\frac{\pi}{10}$.

B6 Harri Potteri pyrkii 610 cm leveän tien yli. Hänen askeleensa ovat 60 cm pitkiä. Kullakin askeleella hän etenee

– kohtisuoraan tien poikki todennäköisyydellä 0,6,
– kohtisuorasta 60 astetta vasemmalle todennäköisyydellä 0,2,
– kohtisuorasta 60 astetta oikealle todennäköisyydellä 0,2.

Millä todennäköisyydellä Harri pääsee tien toiselle puolelle ottamatta kolmattatoista askelta?

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. Yleisesti tehtävän ratkaisun tulisi sisältää myös annetun vastauksen perustelut.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

C1 Varastossa on 14 litraa liuosta A suolapitoisuudeltaan 0,03 % ja 5 litraa liuosta B suolapitoisuudeltaan 0,08 %. Näistä sekoitetaan liuosta C, jonka suolapitoisuus on 0,04 %.

(a) Kuinka monta litraa liuoksia A ja B tarvitaan 1 litraan liuosta C?

(b) Kuinka monta litraa liuosta C voidaan valmistaa varastossa olevista määristä?

Anna vastaukset 0,01 litran tarkkuudella.

C2 Hae reaaliset ratkaisut seuraaville yhtälöille:

(a) $(x+3)^3 = x+3$

(b) $\ln(3+x) = 3\ln 2 + \ln x$

C3 Olkoon $f(x) = |x-1| - 2$ ja $g(x) = |f(x)|$.

(a) Millä muuttujan x reaaliarvoilla on $f(x) \geq 0$?

(b) Piirrä funktion $g(x)$ kuvaaja välillä $x \in [-1, 4]$. Määritä kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala mainitulla välillä.

C4 Käyrän $y = 1/x$, $x > 0$ pisteeseen $P = (x_0, y_0)$ piirretty tangentti ja koordinaattiakselit rajaavat kolmion A.

(a) Määritä kolmion A pinta-ala, ja totea, että se on riippumaton pisteestä P.

(b) Miten P on valittava, jotta kolmion A hypotenuusa olisi mahdollisimman lyhyt? Perustele ratkaisusi.

C5 (a) Millä muuttujan t arvolla integraali

$$\int_t^{t+\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$$

saa suurimman arvonsa, kun $0 \leq t \leq \pi$?

(b) Osoita annettuja trigonometrisia kaavoja käyttäen, että edellä mainittu suurin arvo on $2\sin\frac{\pi}{8}$.

C6 Harri Potteri pyrkii 610 cm leveän tien yli. Hänen askeleensa ovat 60 cm pitkiä. Kullakin askeleella hän etenee

– kohtisuoraan tien poikki todennäköisyydellä 0,6,

– kohtisuorasta 60 astetta vasemmalle todennäköisyydellä 0,2,

– kohtisuorasta 60 astetta oikealle todennäköisyydellä 0,2.

Millä todennäköisyydellä Harri pääsee tien toiselle puolelle ottamatta kolmattatoista askelta?

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. Yleisesti tehtävän ratkaisun tulisi sisältää myös annetun vastauksen perustelut.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

D1 Varastossa on 4 litraa liuosta A suolapitoisuudeltaan 0,03 % ja 14 litraa liuosta B suolapitoisuudeltaan 0,08 %. Näistä sekoitetaan liuosta C, jonka suolapitoisuus on 0,07 %.

(a) Kuinka monta litraa liuoksia A ja B tarvitaan 1 litraan liuosta C?

(b) Kuinka monta litraa liuosta C voidaan valmistaa varastossa olevista määristä?

Anna vastaukset 0,01 litran tarkkuudella.

D2 Hae reaaliset ratkaisut seuraaville yhtälöille:

(a) $(x+4)^3 = x+4$

(b) $\ln(5+x) = 3\ln 2 + \ln x$

D3 Olkoon $f(x) = |x-2| - 1$ ja $g(x) = |f(x)|$.

(a) Millä muuttujan x reaaliarvoilla on $f(x) \geq 0$?

(b) Piirrä funktion $g(x)$ kuvaaja välillä $x \in [1, 5]$. Määritä kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala mainitulla välillä.

D4 Käyrän $y = 1/x$, $x > 0$ pisteeseen $P = (x_0, y_0)$ piirretty tangentti ja koordinaattiakselit rajaavat kolmion A.

(a) Määritä kolmion A pinta-ala, ja totea, että se on riippumaton pisteestä P.

(b) Miten P on valittava, jotta kolmion A hypotenuusa olisi mahdollisimman lyhyt? Perustele ratkaisusi.

D5 (a) Millä muuttujan t arvolla integraali

$$\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx$$

saa suurimman arvonsa, kun $0 \leq t \leq \pi$?

(b) Osoita annettuja trigonometrisia kaavoja käyttäen, että edellä mainittu suurin arvo on $2\sin\frac{\pi}{6}$.

D6 Harri Potteri pyrkii 610 cm leveän tien yli. Hänen askeleensa ovat 60 cm pitkiä. Kullakin askeleella hän etenee

- kohtisuoraan tien poikki todennäköisyydellä 0,6,
- kohtisuorasta 60 astetta vasemmalle todennäköisyydellä 0,2,
- kohtisuorasta 60 astetta oikealle todennäköisyydellä 0,2.

Millä todennäköisyydellä Harri pääsee tien toiselle puolelle ottamatta kolmattatoista askelta?

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida.* Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen. Generellt borde lösningen omfatta även argumentationen för det givna svaret.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 I ett förråd finns 13 liter lösning A, vars salthalt är 0,04 %, och 5 liter lösning B, vars salthalt är 0,08 %. Av dessa blandas en lösning C, vars salthalt är 0,05 %.

(a) Hur många liter av lösningarna A och B behövs för att blanda till en liter av lösning C?

(b) Hur många liter av lösning C kan man tillverka av det, som finns i förrådet?

Ge svaren med 0.01 liters noggrannhet.

A2 Sök de reella lösningarna till de följande ekvationerna:

(a) $(x-3)^3 = x-3$

(b) $\ln(3+x) = 3\ln 3 + \ln x$

A3 Låt $f(x) = |x-1| - 2$ och $g(x) = |f(x)|$.

(a) För vilka reella värden på variabeln x är $f(x) \geq 0$?

(b) Skissa funktionen g:s graf i intervallet $x \in [-2, 3]$ och bestäm arean hos området som begränsas av grafen och x-axeln i detta intervall.

A4 Tangenten till kurvan $y = 1/x$, $x > 0$ i punkten $P = (x_0, y_0)$ och koordinataxlarna begränsar en triangel A.

(a) Bestäm triangeln A:s area och konstatera att arean är oberoende av valet av punkten P.

(b) Hur skall P väljas, för att triangeln A:s hypotenusa skall vara så kort som möjligt? Motivera lösningen.

A5 (a) För vilket värde på variabeln t antar integralen

$$\int_t^{t+\frac{\pi}{6}} \sin x \, dx$$

sitt största värde, då $0 \leq t \leq \pi$?

(b) Visa, med hjälp av de givna trigonometriska formlerna, att det ovan nämnda största värdet är $2\sin\frac{\pi}{12}$.

A6 Harri Potteri försöker ta sig över en 610 cm bred väg. Hans steg är 60 cm långa. Varje steg tar honom

- vinkelrätt mot vägen med sannolikheten 0,6,
- 60 grader åt vänster från vinkelrätt med sannolikheten 0,2,
- 60 grader åt höger från vinkelrätt med sannolikheten 0,2.

Med vilken sannolikhet når Harri andra sidan av vägen utan att behöva ta tretton steg?

Instructions. Use *a separate page* for each problem. Clearly indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps*. Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted. Generally, the solution should include even the reasoning for the given answer.

Allowed instruments: Writing instruments, non–programmable calculator; no dictionaries allowed. **Attachment:** Table of formulae.

A1 In stock there are 13 litres solution A of salt concentration 0.04 % and 5 litres solution B of salt concentration 0.08 % used to produce, by mixing, solution C of salt concentration 0.05 %.

(a) How many litres of solutions A and B are needed to produce 1 litre solutions C?

(b) How many litres solution C may be produced from the solutions in stock?

Give the answers to the accuracy of 0.01 liter.

A2 Seek the real solutions x for the following equations:

(a) $(x-3)^3 = x-3$

(b) $\ln(3+x) = 3\ln 3 + \ln x$

A3 Let $f(x) = |x-1| - 2$ and $g(x) = |f(x)|$.

(a) For which real values of x is $f(x) \geq 0$?

(b) Draw the graph of the function g in the interval $x \in [-2, 3]$ and determine the area bounded by the graph and the x-axis in the given interval.

A4 The tangent at point $P = (x_0, y_0)$ of the curve $y = 1/x$, $x > 0$ and the co-ordinate axes determine triangle A.

(a) Determine the area of triangle A and show that it is independent of the choice of the point P.

(b) How should P be chosen so that the hypotenuse of the triangle A is the shortest possible? Justify your answer.

A5 (a) For which value of t does the integral

$$\int_t^{t+\frac{\pi}{6}} \sin x \, dx$$

obtain its largest value, when $0 \leq t \leq \pi$?

(b) Prove, using given formulas for trigometric functions, that the above mentioned largest value equals $2\sin\frac{\pi}{12}$.

A6 Harri Potteri aims across a 610 cm wide road. His steps are 60 cm long. At each step he advances

– in perpendicular direction straigh across the road with probability 0.6,

– 60 degrees to the left from the perpendicular direction with probability 0.2,

– 60 degrees to the right from the perpendicular direction with probability 0.2.

At which probability does he cross the road without taking the thirteenth step?

Tehtävä 1

(a) Merkitään konsentraatioita p_A, p_B, p_C ja tilavuuksia V_A, V_B, V_C.

$$\begin{cases} V_C p_C &= V_A\, p_A + V_B\, p_B \\ V_c &= V_A + V_B = 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$p_C = V_A\, p_A + (1 - V_A)\, p_B \tag{2}$$

$$V_A = \frac{p_B - p_C}{p_B - p_A} \tag{3}$$

(b) Merkitään liuoksen A suhteellista osuutta $\alpha := V_A/V_C$. Merkitään V^A ja V^B varastossa olevia liuosmääriä.

Vaihtoehto 1: Jotta seosta voidaan valmistaa määrä V^C, tulee kumpiakin ainesosia olla riittävästi:

$$\alpha V^C \le V^A \quad \text{ja} \quad (1-\alpha)V^C \le V^B \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad V^C \le \frac{V^A}{\alpha} \quad \text{ja} \quad V^C \le \frac{V^B}{1-\alpha} \tag{5}$$

Liuosta voidaan siis korkeintaan ylärajan verran.

Vaihtoehto 2: Jos $\frac{V^A}{V^B} < \frac{V_A}{V_B} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, on liouksen A varastomäärä kriittinen, muutoin liuoksen B varastomäärä määrää suurimman valmistettavan määrän. Siispä ...

A	B	C	D
$p_A = 0{,}04\%$, $p_B = 0{,}08\%$, $p_C = 0{,}05\%$	$p_A = 0{,}04\%$, $p_B = 0{,}08\%$, $p_C = 0{,}07\%$	$p_A = 0{,}03\%$, $p_B = 0{,}08\%$, $p_C = 0{,}04\%$	$p_A = 0{,}03\%$, $p_B = 0{,}08\%$, $p_C = 0{,}07\%$
$V_A = 0{,}75$ l $V_B = 0{,}25$ l	$V_A = 0{,}25$ l $V_B = 0{,}75$ l	$V_A = 0{,}80$ l $V_B = 0{,}20$ l	$V_A = 0{,}20$ l $V_B = 0{,}80$ l
$V^A = 13$ $V^B = 5$	$V^A = 5$ $V^B = 14$	$V^A = 14$ $V^B = 5$	$V^A = 4$ $V^B = 14$
$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}80$	$\alpha = 0{,}20$
$V^A/\alpha = 17{,}33$ $V^B/(1-\alpha) = 20{,}00$ $V^C \le 17{,}33$	$V^A/\alpha = 20{,}00$ $V^B/(1-\alpha) = 18{,}67$ $V^C \le 18{,}67$	$V^A/\alpha = 17{,}50$ $V^B/(1-\alpha) = 25{,}00$ $V^C \le 17{,}50$	$V^A/\alpha = 20{,}00$ $V^B/(1-\alpha) = 17{,}50$ $V^C \le 17{,}50$
$\frac{V^A}{V^B} \approx 2,6 < 3$ $V^C \le V^A/\alpha$	$\frac{V^A}{V^B} \approx 0,35 \not< \frac{1}{3}$ $V^C \le V^B/(1-\alpha)$	$\frac{V^A}{V^B} \approx 2.8 < 4$ $V^C \le V^A/\alpha$	$\frac{V^A}{V^B} \approx 0,28 \not< \frac{1}{4}$ $V^C \le V^B/(1-\alpha)$

Tehtävä 2

(a) Selvästi $x = a$ on ratkaisu. Jakamalla yhtälö $(x-a)$:lla saadaan

$$(x-a)^3 = (x-a) \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \vee \quad (x-a)^2 = 1$$

jossa $(x-a)^2 = 1 \Leftrightarrow x - a = \pm 1 \Leftrightarrow x = a \pm 1$. Saamme

$$x \in \{a-1, a, a+1\}.$$

(b) Yhtälö on määritelty kun $x + c > 0$ ja $x > 0$ eli (annetuilla c:n arvoilla) kun $x > 0$. Muokkaamalla yhtälön oikeaa puolta

$$\begin{aligned} \ln(c+x) &= \ln x + 3\ln b && (6)\\ &= \ln(b^3 x) && (7)\\ c + x &= b^3 x && (8)\\ x &= \frac{c}{b^3-1}. && (9) \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, ratkaisu on määrittelyalueella.

A	B	C	D
$a = 3$	$a = 4$	$a = -3$	$a = -4$
$x \in \{2, 3, 4\}$	$x \in \{3, 4, 5\}$	$x \in \{-4, -3, -2\}$	$x \in \{-5, -4, -3\}$
$c = 3$ $b = 3$	$c = 5$ $b = 3$	$c = 3$ $b = 2$	$c = 5$ $b = 2$
$x = 3/(27-1)$ $\approx 0{,}11538$	$x = 5/(27-1)$ $\approx 0{,}19231$	$x = 3/(8-1)$ $\approx 0{,}42857$	$x = 5/(8-1)$ $\approx 0{,}71429$

Tehtävä 3

Sarjat AC: a) Itseisarvon nollakohta $x = 1$, joten

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-2, & x < 1 \\ (x-1)-2, & 1 \le x \end{cases} = \begin{cases} -x-1, & x < 1 \\ x-3, & 1 \le x \end{cases} \tag{10}$$

Tästä $f(x) \ge 0$ kun $x \ge 3$ tai $x \le -1$.

Vaihtoehtoisesti:

$$\begin{aligned} & f(x) = |x-1| - 2 \ge 0 && \Leftrightarrow && |x-1| \ge 2 \\ \Leftrightarrow\ & x-1 \ge 2 \ \vee\ x-1 \le -2 && \Leftrightarrow && x \ge 3 \ \vee\ x \le -1 \end{aligned} \tag{11}$$

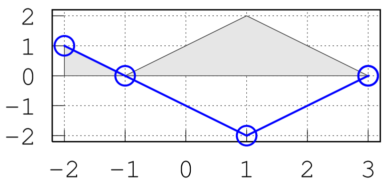
b) Koska $g(x) = -f(x)$, kun $x \in [-1, 3]$ (ja muutoin $g(x) = f(x)$), saadaan kuvan mukainen kuvaaja $y = g(x)$ ja vastaava ala. Huomaa, että kuvaaja on paloittain suora kulmapisteinä $x = 1$ ja nollakohdat $g(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}$. Kulmapisteissä ja välin päätepisteissä

x	-2	-1	1	3	4
$g(x)$	1	0	2	0	1
$f(x)$	1	0	-2	0	1
sarja	A	AC	AC	AC	C

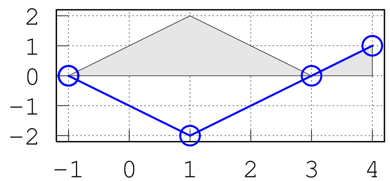
Vaihtoehtoisesti voidaan kirjoittaa auki

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} -x-1, & x \le -1 \\ x+1, & -1 < x \le 1 \\ -x+3, & 1 < x \le 3 \\ x-3, & 3 < x \end{cases} \tag{12}$$

Pinta-ala voidaan laskea suoraan muodostuvien kolmioiden avulla:
$A = \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 4 \cdot 2) = \frac{9}{2}$.



A



C

Sarjat BD: a) Itseisarvon nollakohta $x = 2$, joten

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)-1, & x < 2 \\ (x-2)-1, & 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} -x+1, & x < 2 \\ x-3, & 2 \le x \end{cases} \tag{13}$$

Tästä $f(x) \ge 0$ kun $x \ge 3$ tai $x \le 1$.

Vaihtoehtoisesti:

$$\begin{aligned} & f(x) = |x-2| - 1 \ge 0 && \Leftrightarrow && |x-2| \ge 1 \\ \Leftrightarrow\ & x-2 \ge 1 \ \vee\ x-2 \le -1 && \Leftrightarrow && x \ge 3 \ \vee\ x \le 1 \end{aligned} \tag{14}$$

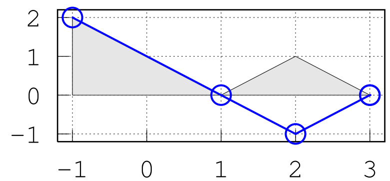
b) Koska $g(x) = -f(x)$, kun $x \in [1, 3]$ (ja muutoin $g(x) = f(x)$), saadaan kuvan mukainen kuvaaja $y = g(x)$ ja vastaava ala. Huomaa, että kuvaaja on paloittain suora kulmapisteinä $x = 1$ ja nollakohdat $g(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}$. Kulmapisteissä ja välin päätepisteissä

x	-1	1	2	3	5
$g(x)$	2	0	1	0	2
$f(x)$	2	0	-1	0	2
sarja	B	BD	BD	BD	D

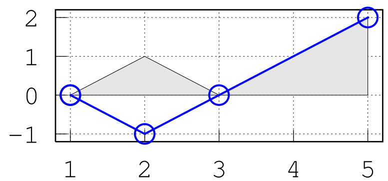
Vaihtoehtoisesti voidaan kirjoittaa auki

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} -x+1, & x \le 1 \\ x-1, & 1 < x \le 2 \\ -x+3, & 2 < x \le 3 \\ x-3, & 3 < x \end{cases} \tag{15}$$

Pinta-ala voidaan laskea suoraan muodostuvien kolmioiden avulla:
$A = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = 3$.



B



D

Tehtävä 4

a) Pisteessä $P = (x_0, y_0) = (a, 1/a)$ tangentin $y - y_0 = k(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1/a = k(x - a)$ kulmakerroin

$$k = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)_{x=a} = -\frac{1}{a^2}.$$

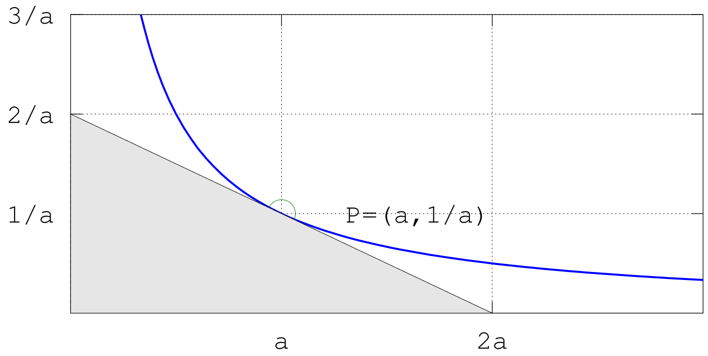
Tangentti leikkaa koordinaatti-akselit pisteessä $(x, 0)$, jossa

$$-\frac{1}{a} = k(x - a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}x,$$

ja myös pisteessä $(0, y)$, jossa

$$y - \frac{1}{a} = -ka = \frac{1}{a},$$

joten leikkauspisteissä $x = 2a$ ja $y = \frac{2}{a}$. Vastaava pinta-ala $A = \frac{1}{2}xy = 2$.



b) Tarkastellaan hypotenuusan pituuden neliötä

$$s(a) = (2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$$

Se minimoituu samalla kun hypotenuusan pituus. Etsitään minimikohtaa derivaatan

$$s'(a) = 4\left(2a - \frac{2}{a^3}\right) = 8\frac{a^4 - 1}{a^3}$$

nollakohdasta

$$s'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 - 1 = (a^2 - 1)\underbrace{(a^2 + 1)}_{\geq 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1 \qquad (16)$$

Ainoassa positiivisessa derivaatan nollakohdassa, $a = 1$, on $s = 8$ eli $s = 2\sqrt{2}$. Kun $a \to \infty$ tai $a \to 0$, selvästi $s \to \infty$, joten minimikohta saadaan derivaatan nollakohdassa.

Tehtävä 5

Parametri:

sarja	A	B	C	D
c	$\pi/6$	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$

Suoraviivaisesti: Merkitään $F(t) = \int_t^{t+c} \sin x \, dx$. Funktio saa maksiminsa joko suljetun välin päätepisteissä tai derivaatan nollapisteessä.

a) Integroimme $F(t)$:n lausekkeen, josta

$$F(t) = -\cos(t+c) + \cos t$$

ja edelleen derivaatan nollakohdasta saamme

$$\begin{array}{rrcll} & F'(t) & = & \sin(t+c) - \sin t = 0 & \\ \Leftrightarrow & \sin(t+c) & = & \sin t & \\ \Leftrightarrow & t+c = t+2\pi n & \vee & t+c = \pi - t + 2\pi n \quad (n \in \mathcal{Z}) & (17) \\ \Leftrightarrow & c = 2\pi n & \vee & 2t = \pi - c + 2n\pi & \\ \Leftrightarrow & \text{epätosi} & \vee & t = \frac{\pi - c}{2} + \pi n & \end{array}$$

Välille $[0, \pi]$ osuu ratkaisu $t = \frac{\pi - c}{2} := t_0$ arvolla $n = 0$. Nollakohdassa ja päätepisteissä saadaan

		A	B	C	D
t_0	$=$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$F(t_0)$	$\approx$	0.51764	0.61803	0.76537	1.00000
$F(0)$	$\approx$	0.13397	0.19098	0.29289	0.50000
$F(\pi)$	$\approx$	−0.13397	−0.19098	−0.29289	−0.50000

$F(t_0)$ on maksimi, koska selvästi $F(t_0) > F(0) > F(\pi)$.

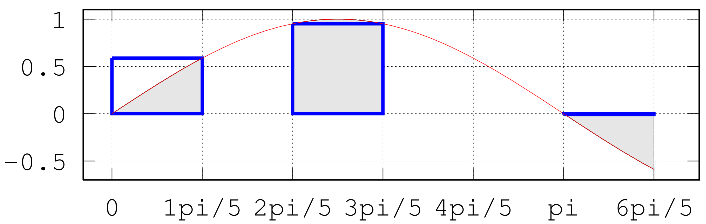
b) Merkitään $a = \frac{\pi}{2}$ ja $b = c/2$ jolloin $t_0 = a - b$. Nyt saadaan joko kaavakokoelman summakaavaa $\cos(a \pm b)$ soveltaen

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \cos t_0 - \cos(t_0 + 2b) \\ &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ &= [\cos a \cos b + \sin a \sin b] - [\cos a \cos b - \sin a \sin b] \\ &= 2 \sin a \sin b \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \sin(\frac{c}{2}). \end{aligned}$$

tai, yleisestä yhteydestä $\cos t = \sin(a - t)$, $\forall t$,

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \cos t_0 - \cos(t_0 + 2b) \\ &= \sin(a - t_0) - \sin(a - (t_0 + 2b)) \\ &= \sin b - \sin(-b) \\ &= 2 \sin b \\ &= 2 \sin(\frac{c}{2}). \end{aligned}$$

Vaihtoehtoisesti: a) Derivaatan nollakohta $t = t_0$ saadaan kuten (17) yllä.



Tarkastelmalla integrandin kuvaajaa (yllä) arvioidaan funktion F arvoja (harmaat pinta-alat) pisteissä $t = 0, t_0, \pi$. Selvästi $F(\pi) < 0$. Arvoja $F(0)$ ja $F(t_0)$ voidaan arvioida kuvassa näkyvien suorakaiteiden aloja käyttäen:

$$F(\pi) < 0 < F(0) < c \sin(c) < c \sin(\pi/2) < F(t_0),$$

maksimi on siis $F(t_0)$. Kuva on B-sarjalle.

b) Käyttäen yhteyttä $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\forall x$,

$$F(t_0) = \int_{\frac{1}{2}(\pi - c)}^{\frac{1}{2}(\pi + c)} \cos(\frac{\pi}{2} - x) \, dx = -\sin(\frac{\pi - \pi - c}{2}) + \sin(\frac{\pi - \pi + c}{2}) = 2 \sin(\frac{c}{2})$$

Tehtävä 6

Kohdassa (1) etenemä kohtisuoraan suuntaan on $a = 60$ cm, muissa kohdissa $b = 60\cos 60^\circ = 30$ cm.

Merkitään suorien askelien lukumäärää n ja tarkastellaan kaikki 12 askeleen kombinaatioita ja vaaditaan, että etenemä on vähintään 610 cm.

$$d(n) = na + (12-n)b \geq 610 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{610-12b}{a-b} = 8,333\ldots \quad \Rightarrow \quad n \geq 9$$

Toisaalta kutakin (toisensa poissulkevaa) tapausta vastaava todennäköisyys on

$$q_n = \binom{12}{n} p^n (1-p)^{12-n}, \qquad p = 0,6.$$

Todennäköisyys kadun ylittämiselle on

$$q = \sum_{n=9}^{12} q_n \approx 0,22534.$$

Vastaavat osatodennäköisyyksien numeroarvot:

n	$12-n$	etenemä	$\binom{12}{n}$	p^n	$(1-p)^{12-n}$	q_n
12	0	720	1	0.002177	1.000000	0.002177
11	1	690	12	0.003628	0.400000	0.017414
10	2	660	66	0.006047	0.160000	0.063852
9	3	630	220	0.010078	0.064000	0.141894

Vaihtoehtoisesti tehtävää voidaan tarkastella niiden askelkombinaatioiden kautta, joilla juuri viimeisellä askelella astutaan tien yli. Merkitään nyt askeleita tai askelkombinaatioita:

merkintä	selite	tn. ($p = 0,6$)
S	suora askel	p
V	vino askel	$1-p$
X(n,m)	kombinaatiot n suorasta ja m vinosta askeleesta mielivaltaisessa järjestyksessä	$\binom{m+n}{n} p^n (1-p)^m$

Tarkastellaan nyt tien yli johtavia pistevieraita askelkombinaatiota ja jaetaan otetut askeleet kahteen vaiheeseen.

Vaihessa I otetaan ensimmäiset 10 askelta. Kymmenen askelta vievät korkeintaan 600 cm päähän (tapaus X(10,0)), joten ylitys tapahtuu siis aikaisintaan 11. askelella.

Vaiheessa II voidaan ottaa korkeintaan 2 askelta, jotta askeleiden yhteismäärä olisi alle 13. Kahdella askeleella päästään korkeintaan 120 cm matka, joten vaiheen I suorien askeleiden määrän alittaessa 7, ei 12 askeleella päästä perille:

Vaihe I: ensimmäiset 10 askelta			Vaihe II: 1-2 askelta	
askeleet	etenemä (cm)	uupuu (cm)	askeleet	tn. ($p = 0,6$)
X(10,0)	600	10	S,V	$q_{10} = 1$
X(9,1)	570	40	S,VS,VV	$q_9 = 1$
X(8,2)	540	70	SS,SV,VS	$q_8 = p + (1-p)p$
X(7,3)	510	100	SS	$q_7 = p^2$
X(6,4)	480	130	ei ole	$q_6 = 0$

Kokonaistodennäköisyys on

$$q = \sum_{n=7}^{10} \binom{10}{n} p^n (1-p)^{10-n}\, q_i \approx 0,22534.$$

Vaihtoehtoisesti Alkeistapaukset voidaan ryhmitellä myös pistevieraisiin joukkoihin $X(11,0) \cup X(10,1) \cup X(9,2)S \cup X(9,3)$. Tällöin ratkaisussa edellytetään erikseen perusteltavan miksi joukot ovat pistevieraita. Edellä perustelu tapahtuu konstruktiivisesti. Yhteys edelliseen ryhmittelyyn on seuraava:

Vaihe I	Vaihe II			
$X(10,0)$	S	V		
$X(9,1)$		S	VS	VV
$X(8,2)$			SS	SV, VS
$X(7,3)$				SS
$\cup$	$X(11,0)$	$X(10,1)$	$X(9,2)S$	$X(9,3)$

Arvostelu

Arvosteluohjeita sovelletaan mallivastauksen kaltaiseen ratkaisuun ja soveltuvin osin muihin ratkaisuihin. Oleelllisesti mallivastauksista poikkeavissa ratkaisutavoissa sovelletaan sensorin harkintaa.

Tehtävä 1

Alakohdat 3+3p.

a) Yhtälö (1) 1p, Yhtälö (2) 2p, kummatkin vastaukset +1. Mikäli V_B puuttuu vastauksena annetaan tehtävästä korkeintaan 5p.

b) Vaihtoehto 1: Vasen puoli yhtälössä (4) tai (5) antaa +1p, samoin oikea puoli. Vastauksena antaminen miniminä antaa viimeisen pisteen. Tapauksessa, jossa erikseen perustelematta käytetty vain toista puolta antaa 1p osatehtävästä.

b) Vaihtoehto 2: Jos verrataan V^A/V^B ja V_A/V_B keskenään, 1p. Jos vastauksesta käy ilmi, että kriittinen aine valittu perustellusti +1p. Vastaus viimeinen piste.

Tehtävä 2

Alakohdat 3+3p.

a) Juuri $x = a$ antaa 1p. Huomaa, että juuri $x = a$ voidaan saada myös perusteettomasti sieventämällä, $(x-a)^3 = (x-a) \not\Leftrightarrow (x-a)^2 = 0$, joka ei arvokasta.

Yhtälön $(x-a)^2 = 1$ ratkaisusta saa 2p. Ensimmäisen pisteen tässä saa joko muodosta $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-(a^2-1)}}{2}$ tai muodosta $x - a = \pm 1$. Yhtälö $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ ei siis arvokas.

Huomiosta $x \neq a$ ei anneta hyvitystä. Pelkkä yhtälön sieventäminen muotoon $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$, antaa 0p. Ratkaisuyritteistä edelliseen, jossa yrite on luvun c_0 tekijöitä, (jos kaikkia ratkaisuja ei löydetä) saa 1p, ei kuitenkaan enempää.

b) Oikean puolen sievennys muotoon (7) antaan ensimmäisen pisteen. Muuttujan ratkaisu (9), +1p Määrittelyalueen tarkastelu +1.

Tehtävä 3

Alakohdat 2+4p.

a) Funktion f tarkasteleminen kahdessa alueessa, hieman väärinkin, antaa 1p. Oikea lauseke rajoineen +1p.

b) Ratkaisussa tulee käydä eksplisiittisesti ilmi, että funktio on kulmapisteiden ulkopuolella (paloittain) lineaarinen (+1p). Tämä käy selvästi ilmi yhtälöistä (15), (12), tai (13), (10) yhdistettynä toteamukseen $g(x) = -f(x)$ a-kohdan välillä. (Itseisarvoja sisältävät lausekkeet eivät ole lineaarisia muuttujan suhteen.) Erityisesti, jos a-kohdassa on käytetty muotoa (11) vastaavasti (14) lineaarisuus täytyy erikseen todeta. Ylimääräisten “välipisteiden” laskeminen ei perustele suoraa, eikä näin sitä, että pinta-ala voidaan jakaa kolmioiksi. Toiseksi (+1p) tehtävästä tulee käydä ilmi vastauksessa mainitut “kulmapisteet” ja niiden luonne; kaksi nollakohtaa, välin päätepisteet, ja f:n kulmapiste, yhteensä neljä pistettä.

Huolellisesti laaditusta funktion g kuvaajasta annetaan +1p; kuvaan tulee olla merkitty koordinaattiakselit ja skaala ja (esimerkiksi) erillisestä taulukosta käy ilmi lasketut pisteet. Pinta-alan laskemisesta (integroimalla tai kolmioita käyttäen) annetaan +1p.

Tulkinnasta, jossa pinta-alan on tulkittu tarkoittavan vain kuvaajan ja x-akselin rajaamaa kolmiota (ei reunassa olevaa kolmiota) annetaan täydet pisteet.

Tehtävä 4

Alakohtien arvostelu 4+2p.

a) Tangentin yhtälön määrittäminen (+2p): Kulmakertoimen laskeminen $k = -1/a^2$ tai muoto $y - \frac{1}{a} = k(x-a)$ antavat ensimmäisen pisteen. Kahden pisteen osiossa myös $y_0 = 1/a$ oltava sijoitettu lausekkeeseen. Pelkästä lausekkeen derivoinnista ei hyvitystä, ellei vastauksesta käy ilmi, että kyse nimenomaan on kulmakertoimista pisteessä $x = x_0$.

Tangentin ja koordinaattiakseliden keskinäisten leikkauspisteiden määrittäminen (+1p).

Pinta-alan määrittäminen ja toteaminen vakioksi (+1p); Muodosta $A = \frac{1}{2}(1 + x_0 y_0)^2$ (vertaa $A = 2$) ei anneta pistettä. Riippumattomuuden tarkasteluksi riittää, että alaksi on saatu vakio, eikä sitä erikseen tarvitse todeta.

b) Lausekkeesta $s(a)$ ei hyvitystä, derivointi +1p, minimikohdan perustelu +1p.

Huomaa: Jos piste $P = (a, 1/a)$ on minikohta, symmetriasyistä myös $P = (1/a, a)$ on. Tästä ei seuraa, että minimi olisi kohdassa $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Ratkaisusta, jossa pinta-alaa on tarkasteltu vain yksittäisissä pisteissä. ei anneta pistettä. Tehävässä pitää nimen omaan osoittaa pinta-alan riippumattomuus pisteestä.

Tehtävä 5

Alakohtien arvostelu (5+1p)

(a) F lauseke (tai F' lauseke) 1p. $F'(t) = 0$ ratkaisussa saavutettaessa muoto $\sin(t + c) = \sin(t)$ ansaitaan +1p.

Yksikäsitteinen t_0:n ratkaisu jossa käsitelty jaksollisuus ja kummatkin haarat +2p. Jos käsittely puutteellista, mutta t_0 arvo oikein, lähtökohtaisesti vain +1p.

Ääriarvon perustelut, esimerkiksi reuna-pisteitä tarkastelemalla, +1p.

Samaistamalla integraali ja pinta-ala, voidaan näyttää, että suurin $F(t)$:n arvo saavutetaan, kun integrointivälin keskipiste $t_0 + c/a = \pi/2$, koska integrandi $t \mapsto \sin(t)$ on symmetrinen eli $f(\frac{\pi}{2} + s) = f(\frac{\pi}{2} - s)$ kaikilla $|s| < \pi$, ja integrandi on konveksi. Niinpä intuitiivisesti selvältä vaikuttava väite “pinta-ala selvästi saa suurimman arvonsa keskellä” on arvokas huomio (1p), muttei itsestäänselvyys. Ilman tarkempaa integradin ominaisuuksien analyysiä ratkaisutavasta ei voi saada täysiä pisteitä.

(b) Alakohdasta hyvitetään mikäli todistus on oikein.

Tehtävä 6

Jos ratkaisusta käy ilmi, että vinot askeleet voidaan yhdistää yhdeksi tapaukseksi, jonka todennäköisyys on $1-p = 0,4$ ja pituus 30cm, annetaan 1p; ratkaisussa voidaan siis tarkastellaan siis kahta ei kolmea askelvaihtoehtoa.

Tehtävän kannalta keskeistä on, että alkeistapaukset jaetaan keskenään pistevieraisiin ryhmiin, jolloin todennäköisyys on summa osajoukkojen todennäköisyyksistä. Pistevierauden osoittaminen riippumattomuuden perusteluksi on tehtävän keskeisin osa. Ensimmäisessä kahdessa vastausvaihtoehdossa tämä osoitetaan konstruktiivisesti, viimeisessä tapauksessa edellytetään tarkempaa analyysiä.

Mallivastauksen ensimmäinen ratkaisumalli: Jos päädytään mallivastauksen askelkombinaatioihin ja ratkaisusta käy ilmi että askeltyypit ovat alternoivia (esiintyy binomikerroin): annetaan +2p. Erityisesti tapauksesta, jossa on tulkittu otettavaksi vaikkapa ensin suorat ja sen jälkeen vinot askeleet, ei anneta pisteitä. Lausekkeesta q_9, q_{10} tai q_{11}, +1p, kaikista 2p. Vastauksen yhdistäminen $q = \sum \ldots$ antaa +1p.

Muut ratkaisutavat arvostellaan soveltaen samoja periaatteita. Erityisesti tapauksissa jossa ei päädytty oikeaan vastaukseen, osajoukot ei ole keskenään riippumattomia, tarkastellaan binomitodenäköisyyksiä, jossa askelsarjat alternovat, ja askelsarjat johtavat tien yli, hyvitetään +1p todennäköisyyden muodosta $\binom{m+n}{n} p^n (1-p)^m$, $n, m > 0$.