HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA/Insinööriosastot Sarja A
Valintakuulustelujen matematiikan koe 29.5.2001

A1. Laske käyrien $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = \frac{3}{4}$ ja $x = \frac{4}{3}$ rajaaman äärellisen alueen pinta-ala. (Tarkka vastaus)

A2. Mikä on sen ympyräsektorin säde, jonka ympärysmitta on 12 ja pinta-ala mahdollisimman suuri?

A3. Tason vektoreilla $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on yhteinen alkupiste suoralla $y = 4$. Vektorin $\bar{a}$ loppupiste on (0, 2) ja vektorin $\bar{b}$ loppupiste (0, −1). Mikä on kyseinen alkupiste, kun a_b (vektorin $\bar{a}$ skalaariprojektio vektorilla $\bar{b}$) on 2/3 vektorin $\bar{b}$ pituudesta?

A4. Bakteeriviljelmässä bakteerien lukumäärä kaksinkertaistuu joka tunti, kun bakteereille annetaan ravintoliuosta, ja vähenee p% joka tunti, kun ravintoliuosta ei anneta. Eräässä kokeessa, jossa ravintoliuoksen antaminen alkoi hetkellä $t = 0$ ja loppui hetkellä $t = 3\ h$, havaittiin tunnin välein tehdyissä mittauksissa, että hetkellä $t = 11\ h$, eli 11 tuntia alkuhetken $t = 0$ jälkeen, bakteerien lukumäärä oli ensimmäisen kerran pienempi kuin alkuhetkellä. Arvioi koehavaintojen perusteella, millä välillä prosenttiluku p voi olla. (Anna välin päätepisteet yhden desimaalin tarkkuudella.)

A5. Kahden peräkkäisen voimakkaan maanjäristyksen (voimakkuus yli 3,5 Richterin asteikolla mitattuna) välinen aika t (yksikkönä vuorokausi) on satunnaismuuttuja, joka noudattaa eksponentiaalijakaumaa tiheysfunktiona

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{90} e^{-t/90} & \text{, kun } t \geq 0 \\ 0 & \text{, kun } t < 0 \end{cases}.$$

Millä todennäköisyydellä seuraava voimakas maanjäristys
a) sattuu 7 vuorokauden aikana,
b) ei satu 5 ensimmäisen viikon aikana

siitä kun edellinen voimakas järistys on juuri sattunut? (Anna todennäköisyydet kolmen desimaalin tarkkuudella.)

A6. Astiassa on vedellä laimennettua etanolia, jota kuluu jatkuvasti. Alkutilanteessa, jolloin astia on täynnä, etanolin ja veden sekoitussuhde on 1:4. Tämän jälkeen, aina kun seosta on kulunut puolet astian sisällöstä, astia, astia täytetään lisäämällä etanolia ja vettä sekoitussuhteessa 1:9. Mikä on seoksen etanolipitoisuus k:nnen täytön jälkeen? Mitä arvoa pitoisuus lähestyy, kun täyttökertojen lukumäärä kasvaa rajatta?

A1. Bestäm arean av det ändliga område, som begränsas av kurvorna $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = \frac{3}{4}$ och $x = \frac{4}{3}$. (Exakt svar)

A2. Bestäm radien av den cirkelsektor med omkretsen 12, vars area är maximal.

A3. Planvektorerna $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ har en gemensam utgångspunkt på den räta linjen $y = 4$, samt ändpunkterna (0, 2) respektive (0, –1). Bestäm utgångspunkten ifråga, då a_b (vektorn $\overline{a}$:s skalära projektion på vektorn $\overline{b}$) är 2/3 av vektorn $\overline{b}$:s längd.

A4. I en bakterieodling fördubblas bakteriernas antal varje timme, då bakterierna ges en näringsvätska. Om näringsvätskan uteblir, minskar bakteriernas antal med $p\%$ varje timme. I ett experimet inleddes tillförseln av näringsvätska vid tidpunkten $t = 0$, och upphörde vid tidpunkten $t = 3\ h$. Vid observationer, som gjordes med en timmes mellanrum, kunde man konstatera, att bakteriernas antal vid tidpunkten $t = 11\ h$, dvs. 11 timmar efter begynnelsetidpunkten $t = 0$, för första gången var mindre än vid begynnelsetidpunkten. I vilket intervall kan prosenttalet p ligga på basis av observationerna? (Ge intervallets ändpunkter med en decimals noggrannhet.)

A5. Tiden t (enhet dygn) mellan två kraftiga jordbävningar (styrka över 3,5 på Richterskalan) är en stokastisk variabel med exponentiell täthetsfunktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{90} e^{-t/90} & \text{, för } t \geq 0 \\ 0 & \text{, för } t < 0 \end{cases}.$$

Med vilken sannolikhet inträffar följande kraftiga jordbävning

a) inom 7 dygn,

b) inte under de fem första veckorna,

efter det att en kraftig jordbävning just har inträffat? (Ge sannolikheterna med tre decimalers noggrannhet.)

A6. Ett kärl innehåller med vatten utspätt etanol, som kontinuerligt förbrukas. Till att börja med, då kärlet är fullt, är etanolets och vattnets blandningsförhållande 1:4. Härefter fylls kärlet alltid på nytt, då hälften av dess innehåll förbrukats, genom tillsättning av etanol och vatten i blandningsförhållandet 1:9. Bestäm kärlets innehålls etanolhalt efter den k:te påfyllningen. Vilket värde närmar sig halten, då antalet påfyllningar växer obegränsat?

INSMAT 2001 A1	B1	C1	D1	
Alue muodostuu osista $A_1: \ \frac{3}{4} \le x \le 1 \ , \ \frac{1}{x} \le y \le \frac{1}{x^2}$, ja $A_2: \ 1 \le x \le \frac{4}{3} \ , \ \frac{1}{x^2} \le y \le \frac{1}{x}$,	$\frac{4}{5} \le x \le 1$ $1 \le x \le \frac{5}{4}$	$\frac{5}{6} \le x \le 1$ $1 \le x \le \frac{6}{5}$	$\frac{6}{7} \le x \le 1$ $1 \le x \le \frac{7}{6}$	1p
joiden pinta-alat ovat $a(A_1) = \int_{\frac{3}{4}}^{1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})dx = \Big/_{\frac{3}{4}}^{1} (-\frac{1}{x} - \ln(x)) = \frac{1}{3} + \ln 3 - \ln 4,$ $a(A_2) = \int_{1}^{\frac{4}{3}} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})dx = \Big/_{1}^{\frac{4}{3}} (-\frac{1}{x} - \ln(x)) = -\frac{1}{4} + \ln 4 - \ln 3.$	$\frac{1}{4} + \ln 4 - \ln 5$ $-\frac{1}{5} + \ln 5 - \ln 4$	$\frac{1}{5} + \ln 5 - \ln 6$ $-\frac{1}{6} + \ln 6 - \ln 5$	$\frac{1}{6} + \ln 6 - \ln 7$ $-\frac{1}{7} + \ln 7 - \ln 6$	4p
Koko alueen pinta-ala on siis $a(A_1) + a(A_2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$	$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}.$	6p

INSMAT 2001 A2	B2	C2	D2	
Jos ympyrän säde on r ja sektorin keskuskulma on α (rad) , on vastaava kaarenpituus αr , joten sektorin ympärysmitta on $2r + \alpha r$.				
Koska siis $2r + \alpha r = 12$, on	$= 16$	$= 20$	$= 24$	
$\alpha = \frac{12}{r} - 2.$	$\alpha = \frac{16}{r} - 2.$	$\alpha = \frac{20}{r} - 2.$	$\alpha = \frac{24}{r} - 2.$	2p
Sektorin pinta-ala säteen funktiona on silloin				
$A(r) = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 (\frac{12}{r} - 2) = 6r - r^2.$	$A(r) = 8r - r^2$	$A(r) = 10r - r^2$	$A(r) = 12r - r^2$	4p
Ehdosta $A'(r) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2r = 0$ saadaan A:n maksimikohta:				
$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$	
(A:n kuvaaja on alaspäin aukeava parabeli).				6p

INSMAT 2001 A3 C3	B3 D3	
Olkoon yhteinen alkupiste (x, 4) . Silloin		
$\begin{cases} \overline{a} = (0,2) - (x,4) = (-x,-2), \\ \overline{b} = (0,-1) - (x,4) = (-x,-5). \end{cases}$		
Nyt $\lvert\overline{b}\rvert = \sqrt{x^2+25}$		
ja		
$a_b = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{b}\rvert} = \dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+25}}$,		3p
mistä saadaan		
$\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+25}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+25} \quad \Leftrightarrow$	$\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+25}} = \dfrac{4}{5}\sqrt{x^2+25} \quad \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow \quad x^2 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{5}$.	$\Leftrightarrow \quad x^2 = 50 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 5\sqrt{2}$	
Siis haettu piste on $(\pm 2\sqrt{5}, 4)$ (2 ratkaisua) .	piste on $(\pm 5\sqrt{2}, 4)$	6p

INSMAT 2001 A4 C4	B4 D4	
Oletetaan, että bakteerien lukumäärä alkuhetkellä $t = 0$ on $A > 0$. Merkitään $x(t)$ = bakteerien lukumäärä hetkellä t (yksikkönä tunti). Silloin siis $x(0) = A$, ja $x(t) = 2^t A$, kun $0 \le t \le 3$; erityisesti $x(3) = 8A$. Kun $t > 3$, on $x(t) = (1-\frac{p}{100})^{t-3}x(3).$		3p
Oletuksen mukaan on $x(11) < A \leq x(10)$ eli	$x(13) < A \leq x(12)$	
$(1-\frac{p}{100})^8 \cdot 8A < A \leq (1-\frac{p}{100})^7 \cdot 8A$,	$(1-\frac{p}{100})^{10} \cdot 8A < A \leq (1-\frac{p}{100})^9 \cdot 8A$	
mistä saadaan $1-\frac{p}{100} < \sqrt[8]{\frac{1}{8}} \approx 0.7711$ eli $p > 22.89$,	$1-\frac{p}{100} < \sqrt[10]{\frac{1}{8}} \approx 0.8123$	
ja toisaalta $1-\frac{p}{100} \ge \sqrt[7]{\frac{1}{8}} \approx 0.7430$ eli $p \leq 25.70$.	$1-\frac{p}{100} \ge \sqrt[9]{\frac{1}{8}} \approx 0.7937$	
Siis p (pyöristettynä) toteuttaa $22.9 \leq p \leq 25.7$.	$18.8 \leq p \leq 20.6$	6p

INSMAT 2001 tehtävä 5.

Aika seuraavaan voimakkaaseen järistykseen on välillä $0 \le t \le 7$ todennäköisyydellä

$$\int_0^7 \frac{1}{90} e^{-t/90} dt = \Big/_{0}^{7} - e^{-t/90} = -e^{-7/90} + 1 \approx 0.075 .$$

3p

Vastaavasti $t > 35$ tapahtuu todennäköisyydellä

$$1 - \int_0^{35} \frac{1}{90} e^{-t/90} dt = \ldots = 1 - (-e^{-35/90} + 1) = e^{-35/90} \approx 0.678$$

6p

(tai yhtä hyvin: $\int_{35}^{\infty} \frac{1}{90} e^{-t/90} dt = \ldots = e^{-35/90} - 0 \approx 0.678$).

INSMAT 2001 tehtävä 6.	

Olkoon astian tilavuus V ja olkoon q_k = etanolipitoisuus k:nnen täytön jälkeen , k = 0, 1, 2, ...

Siis pitoisuus alussa on $q_0 = \dfrac{\frac{1}{1+4}\cdot V}{V} = \dfrac{1}{5}$. Täytössä lisätään etanolia aina määrä $\dfrac{1}{1+9}\cdot\dfrac{V}{2}$, joten

$$q_1 = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{V}{2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{V}{2}}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)$$

ja

$$q_2 = \frac{q_1\cdot\frac{V}{2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{V}{2}}{V} = \frac{q_1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\frac{1}{10}$$

jne; yleisesti

$$q_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\frac{1}{10}\ .$$

Sievennys => $q_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{1}{5}+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\frac{1}{10} = \ldots = \frac{1}{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\frac{1}{5}$. 4p

Selvästi $q_k \xrightarrow{k\to\infty} \dfrac{1}{10}$. 6p