Valintakuulustelujen matematiikan koe 31.5.2005

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun.

A1. Vuoden 2004 alussa Tampereen seutukunnan asukkaista 64,9 % asui Tampereella ja 35,1 % kuudessa lähikunnassa. Oletetaan, että Tampereen väkiluku jatkaa 0,9 %:n vuosikasvua ja lähikuntien väkiluku 1,7 %:n vuosikasvua.
a) Kuinka suuri osa Tampereen seutukunnan asukkaista asuu Tampereella vuoden 2024 alussa? Anna vastaus prosentteina yhden desimaalin tarkkuudella.
b) Minkä vuoden alussa Tampereella ensimmäisen kerran on vähemmän asukkaita kuin kuudessa lähikunnassa?

A2. a) Määritä tasokäyrien $y = 25x^3$ ja $x = 5y^2$ leikkauspisteet.
b) Määritä a)-kohdan käyrien rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala.

A3. R-säteisen ympyrän sisään piirretään säännöllinen risti kuvan 1 osoittamalla tavalla. Millä kulman α arvolla risti on pinta-alaltaan mahdollisimman suuri? Anna vastaus asteina yhden desimaalin tarkkuudella.

A4. Induktiokarkaisussa suorakulmion muotoisen metallilevyn kahta reunaa kuumennetaan värähtelevän magneettikentän synnyttämän sähkövirran avulla. Tarkastellaan lämpötilaa yhdessätoista levyn pisteessä (kts. kuva 2). Kahdeksan reunalla sijaitsevan pisteen lämpötiloiksi on mitattu joko 20 °C tai 710 °C kuvan mukaisesti. Laske arviot levyn sisäpisteiden P_1, P_2 ja P_3 lämpötiloiksi siten, että kunkin pisteen lämpötilaksi tulee tätä pistettä lähinnä olevien neljän muun reuna- tai sisäpisteen lämpötilojen keskiarvo. Ilmoita vastaukset asteina yhden yksikön tarkkuudella.

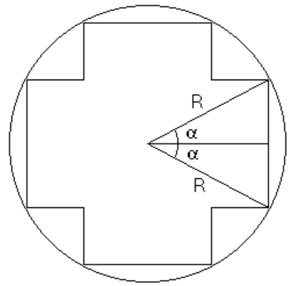
A5. Yksinkertaisessa liikennemallissa oletetaan, että pistemäiset autot ajavat jonossa vakionopeudella v ja vakioetäisyydellä a toisistaan. Lisäksi oletetaan, että ajonopeuden v, välimatkan a ja nopeusrajoituksen v_0 välillä vallitsee riippuvuus

$$v/v_0 = \min\{1, \sqrt{a/L}\},$$

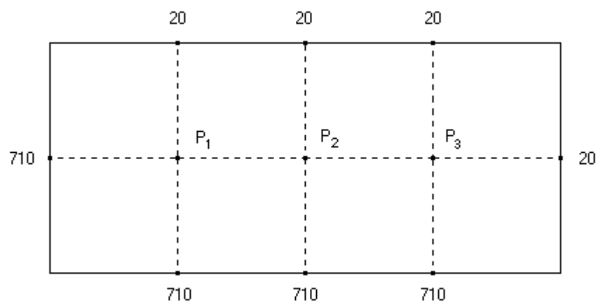
missä L on olosuhteille ja liikennekulttuurille ominainen vakio. Kaupungin ulosmenotiellä on nopeusrajoitus v_0 =100 km/h. Perjantairuuhkassa mitataan klo 16 maaseudulle päin ajavien autojen määräksi 1180 autoa/h ja klo 18 vastaavasti 1920 autoa/h. Mikä on mallin mukaan jonossa ajavien autojen nopeus mittaushetkillä a) klo 16, b) klo 18, kun käytetään vakion arvoa $L = 80$ m?
(Huom: Merkinnällä $\min\{x,y\}$ tarkoitetaan pienempää luvuista x ja y.)

A6. Jääkiekkojoukkueet A ja B ratkaisevat liigamestaruuden pelaamalla toisiaan vastaan ottelusarjan. Mestariksi tulee joukkue, joka ensimmäisenä voittaa neljä peliä. Jokaisessa ottelussa pelataan tarvittaessa jatkoaikoja, kunnes voittaja selviää, ts. tasapelejä ei ole. Oletetaan, että kussakin ottelussa joukkue A voittaa todennäköisyydellä 1/3 ja että otteluiden lopputulokset ovat toisistaan riippumattomia.
a) Millä todennäköisyydellä mestaruuden selvittämiseen tarvitaan vähintään viisi peliä?
b) Millä todennäköisyydellä joukkue A voittaa mestaruuden?

Liite: kaavakokoelma



Kuva 1



Kuva 2

Inträdesförhör i matematik 31.5.2005

Anvisningar. Placera varje uppgift *på egen sida*. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar bör överstryckas*. Om icke-överstruckna lösningar föreligger för samma uppgift, så bedöms den sämsta av dessa.

A1. I början av år 2004 bodde 64,9 % av invånarna i Tammerfors ekonomiska region i Tammerfors och 35,1 % i sex närkommuner. Antag att invånarantalet i Tammerfors växer med en årlig tillväxthastighet på 0,9 % och invånarantalet i närkommunerna med en årlig tillväxthastighet på 1,7 %.
a) Hur stor del av invånarna i Tammerfors ekonomiska region kommer att bo i Tammerfors i början av år 2024? Ange svaret i procent med en decimals noggrannhet.
b) I början av vilket år kommer Tammerfors för första gången att ha färre invånare än de sex närkommunerna?

A2. a) Bestäm de plana kurvornas $y = 25x^3$ och $x = 5y^2$ skärningspunkter.
b) Bestäm arean av det ändliga område som begränsas av kurvorna i a)-delen.

A3. Ett regelbundet kors ritas in i en cirkel med radien R som i figur 1. För vilket värde på vinkeln α kommer korsets area att vara så stor som möjligt? Ange svaret i grader med en decimals noggrannhet.

A4. Två av kanterna hos en rektangulär metallskiva upphettas med hjälp av induktionsströmmar, som induceras av ett varierande magnetfält. Man studerar temperaturen i elva punkter på skivan (se figur 2). I de åtta punkterna på skivans rand uppmättes antingen temperaturen 20 $^\circ C$ eller 710 $^\circ C$ enligt figuren. Beräkna estimat för temperaturerna i de inre punkterna P_1, P_2 och P_3 så att temperaturen i var och en av dessa tre punkter blir medelvärdet av temperaturerna i dess fyra närmaste grannar bland randpunkterna och de inre punkterna. Ange svaren i grader med en enhets noggrannhet.

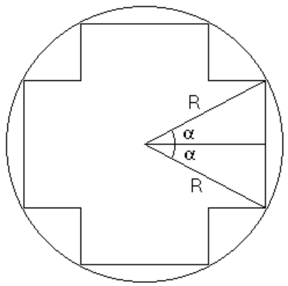
A5. I en enkel trafikmodell antar man att punktformiga bilar kör i en kö med den konstanta hastigheten v och med det konstanta avståndet a mellan bilarna. Vidare antar man, att sambandet

$$v/v_0 = \min\{1, \sqrt{a/L}\}$$

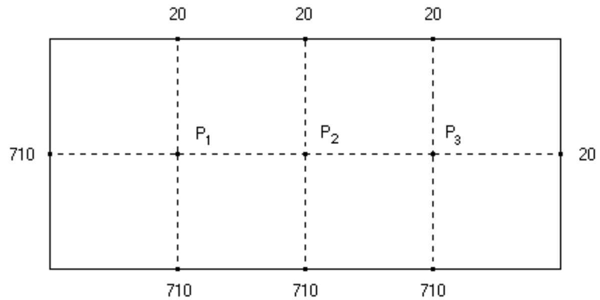
råder mellan körhastigheten v, avståndet a och hastighetsbegränsningen v_0, där L är en konstant, som beror på vägförhållandena och trafikkulturen. På utfartsvägen från en stad är hastighetsbegränsningen v_0 =100 km/h. I fredagsrusningen uppmättes 1180 bilar/h kl. 16 och 1920 bilar/h kl. 18 på väg ut mot landsbygden. Vilken är bilarnas körhastighet i mätögonblicket enligt modellen a) kl. 16, b) kl. 18, om man använder värdet $L = 80$ m på konstanten?
(Märk: Med beteckningen $\min\{x, y\}$ avses det mindre av talen x och y.)

A6. Ishockeylagen A och B avgör ligamästerskapet genom att spela en matchserie mot varandra. Mästare blir det lag som först vinner fyra matcher. Varje match spelas vid behov med förlängningar tills man får en vinnare, dvs. det blir inga oavgjorda matcher. Antag att lag A i varje match vinner med sannolikheten 1/3 och att resultaten av matcherna är oberoende av varandra.
a) Med vilken sannolikhet behövs minst fem matcher för att avgöra mästerskapet?
b) Med vilken sannolikhet vinner lag A mästerskapet?

Bilaga: formelsamling



Figur 1



Figur 2

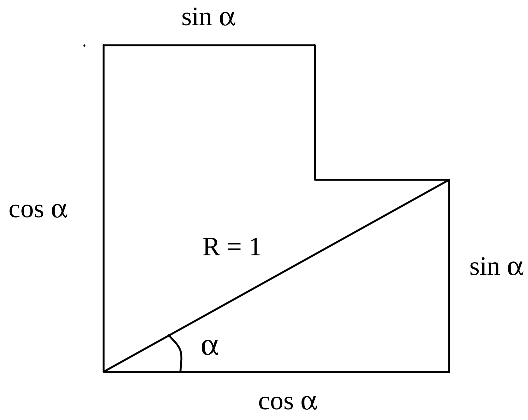
INSMAT 2005 **tehtävä 1** sarja A	sarja B	sarja C	sarja D		pisteytys
Olkoon seudun väkiluku vuoden 2004 alussa $A > 0$. a) Vuoden 2024 alussa on Tampereen asukasluku $= x = 1.009^{20} \cdot 64.9\ A = 77.63...\ A$, lähikuntien asukasluku $= y = 1.017^{20} \cdot 35.1\ A = 49.17...\ A$. $\frac{x}{x+y} = 0.6122... \Rightarrow$ Treella asuu **61,2 %** seudun asukkaista.	$= 73.14...$ $= 50.14...$ $= 0.5932...$ $\Rightarrow$ **59,3 %**	$= 76.11...$ $= 51.14...$ $= 0.5981...$ $\Rightarrow$ **59,8 %**	$= 71.70...$ $= 53.18...$ $= 0.5741$ $\Rightarrow$ **57,4 %**		3p
b) Tampereella on n vuoden kuluttua vähemmän asukkaita, jos $1.009^n \cdot 64.9\ A < 1.017^n \cdot 35.1\ A \Leftrightarrow \left(\frac{1.017}{1.009}\right)^n > \frac{64.9}{35.1}$ $\Leftrightarrow n > \frac{\ln(64.9/35.1)}{\ln(1.017/1.009)} = 77.82... \Rightarrow n = 78$ (pienin kokonaisluku) Siis Tampereella on ensi kerran vähemmän asukkaita 78 vuoden kuluttua eli vuoden **2082** alussa.	$= 51.83...$ $\Rightarrow n = 52$ **2056**	$= 56.63...$ $\Rightarrow n = 57$ **2061**	$38.91...$ $\Rightarrow n = 39$ **2043**		3p

INSMAT 2005 **tehtävä 2** sarjat A ja C	sarjat B ja D		pisteytys
a) Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} y = 25x^3, \\ x = 5y^2 \end{cases}$: $y = 25\cdot(5y^2)^3 = 5^5y^6 \iff y(1-5^5y^5) = 0 \iff y = 0$ tai $y = 1/5$; tällöin vastaavasti $x = 0$ tai $x = 1/5$. Siis leikkauspisteet ovat **(0,0)** ja $(\mathbf{\frac{1}{5}}, \mathbf{\frac{1}{5}})$.	$\begin{cases} y = 9x^3, \\ x = 3y^2 \end{cases}$ $y(1-3^5y^5) = 0.$ **(0,0)** ja $(\mathbf{\frac{1}{3}}, \mathbf{\frac{1}{3}})$		3p
b) Kyseinen alue on A : $25x^3 \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{5}}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{5}$, ja sen ala on $a(A) = \int_0^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{\frac{x}{5}} - 25x^3 \right) dx = \Big/_0^{\frac{1}{5}} \left(\frac{2x^{3/2}}{3\sqrt{5}} - \frac{25x^4}{4} \right) = \mathbf{\frac{1}{60}}$	$9x^3 \leq y \leq \sqrt{\frac{x}{3}}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ $\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt{\frac{x}{3}} - 9x^3 \right) dx = \mathbf{\frac{5}{108}}$		3p

INSMAT 2005 **tehtävä 3**

pisteytys

Selvästi $0 \leq \alpha \leq \pi/4$, lisäksi voidaan olettaa, että $R = 1$. Ristin neljännes (kuva vieressä) on $\cos\alpha$ -sivunen neliö, jonka kulmasta on poistettu $(\cos\alpha - \sin\alpha)$-sivuinen neliö.



Ristin pinta-ala α:n funktiona saa maksimiarvon, kun funktio

$$f(\alpha) = \cos^2\alpha - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = $$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha$$

saa maksimiarvon.

2p

$$f'(\alpha) = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha,$$

joten $f'(\alpha) = 0 \iff \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2$ eli $\tan 2\alpha = 2$.

Tällöin $2\alpha = \arctan 2 = 1.107...\ (\text{rad}) = 63.434...^\circ$, joten $\alpha = 31.717...^\circ$.

3p

Derivaatan etumerkkitarkastelu tms. $\Rightarrow$ tämä on todella maksimikohta.

1p

Siis ristin pinta-ala on suurin, kun $\alpha = \mathbf{31.7}^\circ$.

INSMAT 2005 **tehtävä 4** sarja A	sarja B	sarja C	sarja D	pisteytys
Pisteiden P_1, P_2, P_3 lämpötiloille x_1, x_2, x_3 on tehtävänannon mukaan voimassa yhtälöryhmä $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(20 + 2\cdot 710 + x_2) \\ x_2 = \frac{1}{4}(20 + x_1 + 710 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{4}(2\cdot 20 + x_2 + 710) \end{cases}$	730	810	830	2p
$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $x_2 = \frac{1}{4}(730 + \frac{1440 + x_2}{4} + \frac{750 + x_2}{4})$				2p
$\vdots$				
$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 = 1805/4 \approx \mathbf{451} \\ x_2 = \mathbf{365} \\ x_3 = 1115/4 \approx \mathbf{279} \end{cases}$	1855/4 ≈ **464** = **375** 1145/4 ≈ **286**	2055/4 ≈ **514** = **415** 1265/4 ≈ **316**	2105/4 ≈ **526** = **425** 1295/4 ≈ **324**	2p

INSMAT 2005 **tehtävä 5** sarjat A ja C	sarjat B ja D		pisteytys
Olkoon jonon nopeus = v ja peräkkäisten autojen etäisyys = a . Jos tarkkailupisteen ohittaa tunnissa N autoa, on siis Na = v eli a = v/N. Yhtälöstä $v/v_0 = \sqrt{a/L}$ saadaan			
$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{a}{L} = \frac{v}{NL} \quad \text{eli} \quad v = \frac{v_0^2}{NL} \qquad (1)$$			2p
(v = 0 ei ole järkevä), missä v_0 = 100 km/h ja L = 80 m = 0.08 km (ja N:n yksikkö on 1/h).			
a) (klo 16) Nyt N = 1180 ja kaava (1) antaisi $v = \frac{100^2}{1180 \cdot 0.08} \frac{km}{h} =$ = 105.93... km/h, mikä ei ole mahdollista, sillä on oltava $v/v_0 \leq 1$ (eli rajoitusta ei rikota).	N = 1120 (111.607...)		
Siis $v/v_0 = 1$ eli			
v = **100 km/h**.	v = **100 km/h**.		2p
b) (klo 18) Nyt N = 1920 , ja kaavasta (1) saadaan	N = 1760		
v = **65.1 km/h**.	v = **71.0 km/h**		2p

INSMAT 2005 **tehtävä 6**

pisteytys

a) P(”4 peliä riittää”) = P(”A voittaa 4 peräkkäin”) + P(”B voittaa 4 peräkkäin”) = $\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{17}{81}$

$\Rightarrow$ P(”tarvitaan vähintään 5 peliä”) = 1 - $\frac{17}{81}$ = $\mathbf{\frac{64}{81}}$ = 0.790... .

2p

b) Suotuisassa tapauksessa (A voittaa mestaruuden) voitot jakautuvat A:n hyväksi 4 – n , missä $0 \le n \le 3$.
A voittaa viimeisen ottelun. Ensimmäisissä 3+n ottelussa voitot voivat tulla missä järjestyksessä tahansa;
eri järjestysten lukumäärä on $\binom{3+n}{n}$ (binomikerroin).

Siis P(”A voittaa 3, B voittaa n”) = $\binom{3+n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^n$, joten eri tapauksissa saadaan (huomioidaan vielä A:n voittotodennäköisyys 1/3 viimeisessä ottelussa)

2p

P(”voitot A:lle 4 - 0”) = $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$, P(”voitot A:lle 4 - 1”) = $\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{243}$

P(”voitot A:lle 4 - 2”) = $\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{729}$, P(”voitot A:lle 4 - 3”) = $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{160}{2187}$.

Näiden summana saadaan: P(”A voittaa mestaruuden”) = $\mathbf{\frac{379}{2187}}$ = 0.173... .

2p