Valintakuulustelujen matematiikan koe 25.5.2004

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun.

1. Erästä tuotetta myytiin liikkeessä A ohjehinnasta lasketulla 20 % alennuksella, ja myöhemmin alennetusta hinnasta vähennettiin vielä 10 euron käteisalennus. Toisessa liikkeessä B samasta ohjehinnasta annettiin aluksi 10 % alennus ja myöhemmin vielä 20 euron käteisalennus. Kaikkien alennusten jälkeen tuotteen hinta liikkeessä A oli 10 % halvempi kuin liikkeessä B. Mikä oli tuotteen ohjehinta?

2. Funktion $f(x) = x^2 + 3x$ kuvaajalle pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretty tangentti kulkee myös pisteen $(2,6)$ kautta. Määritä kaikki mahdolliset luvut x_0.

3. Hiukkanen liikkuu tasossa niin, että hetkellä t sen koordinaatit ovat

$$\begin{cases} x = \cos t + 4\sin t \\ y = -2\cos t + 2\sin t. \end{cases}$$

   Mikä on hiukkasen lyhin etäisyys origosta?

4. Sähkömoottori käynnistetään ajanhetkellä $t = 1$. Virtalähteessä olevan vian vuoksi moottorin teho ei pysy vakiona, vaan riippuu ajasta t lausekkeen

$$P(t) = 4000\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)$$

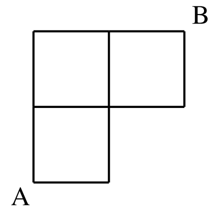
   mukaisesti. Millä sekunnin pituisella aikavälillä $[t_0, t_0 + 1]$ moottori tekee suurimman mahdollisen työn?

   Lisätietoja: Teholla $P = P(t)$ toimiva moottori tekee aikavälillä $[t_1, t_2]$ työn W, joka voidaan laskea integraalina

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt.$$

   Kaikki suureet on annettu SI-järjestelmässä, joten tehtävä voidaan käsitellä ilman yksiköitä.

5. Viereinen kuvio esittää osaa kaupungin katuverkosta. Henkilö kulkee päivittäin risteyksestä A risteykseen B käyttämällä mahdollisimman lyhyttä reittiä, jolloin matkan pituus on 4 yksikköä. Sellaisissa risteyksissä, joissa kaksi suuntaa johtaa lyhimpään reittiin, hän valitsee suunnan lanttia heittämällä.



   a) Piirrä (erilliset) kuviot kaikista lyhimmistä reiteistä ja määritä näiden valintatodennäköisyydet.

   b) Toinen henkilö kulkee risteyksestä B risteykseen A ja valitsee mahdollisimman lyhyen reitin vastaavalla tavalla. Molemmat lähtevät liikkeelle samanaikaisesti ja kulkevat samaa vauhtia. Millä todennäköisyydellä he kohtaavat toisensa matkan puolivälissä?

6. Pöydälle on asetettu jonoon ääretön määrä palloja, joiden säteet ovat

$$r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

   Ensimmäistä lukuun ottamatta kukin pallo koskettaa kahta muuta, ja lisäksi pallojen keskipisteet osuvat samalle suoralle.

   a) Määritä säteen r_n lauseke säteiden r_{n-1} ja r_{n+1} funktiona ($n = 2, 3, \dots$).

   b) Oletetaan, että $r_1 = 3$ ja $r_3 = 1$. Määritä kaikkien pallojen tilavuuksien summa.

TH, TTU, VTU, UU, ÅA, VU, ÅU / Ingenjörsavdelningarna — serie A

Inträdesförhör i matematik 25.5.2004

Anvisningar. Placera varje uppgift *på egen sida*. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar bör överstryckas*. Om icke-överstruckna lösningar föreligger, så bedöms den sämsta av dessa.

1. En viss produkt såldes i en affär A med 20 % rabatt på riktpriset och senare drogs ytterligare 10 euro av som kontantrabatt från det rabatterade priset. I en annan affär B gavs först 10 % rabatt på samma riktpris och senare drogs ytterligare 20 euro av som kontantrabatt från det rabatterade priset. Efter alla rabatterna var produktens pris 10 % lägre i affär A än i affär B. Vad var produktens riktpris?

2. Tangenten i punkten $(x_0, f(x_0))$ till grafen av funktionen $f(x) = x^2 + 3x$ går också genom punkten $(2,6)$. Bestäm alla möjliga värden på talet x_0.

3. En partikel rör sig i planet så att dess koordinater vid tiden t ges av

$$\begin{cases} x = \cos t + 4\sin t \\ y = -2\cos t + 2\sin t. \end{cases}$$

   Vad är partikelns minsta avstånd från origo?

4. En elmotor startas vid tiden $t = 1$. På grund av ett fel i strömkällan förblir motorns effekt inte konstant, utan den beror på tiden t enligt formeln

$$P(t) = 4000\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right).$$

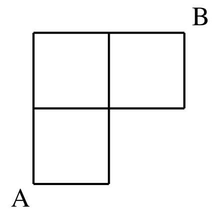
   Inom vilket tidsinterval $[t_0, t_0 + 1]$ av längden 1 sekund utför motorn största möjliga arbetet?

   Extra information: En motor med effekten $P = P(t)$ utför under tidsintervallet $[t_1, t_2]$ arbetet W, som kan beräknas som integralen

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt.$$

   Alla storheter är givna i SI-systemet, så uppgiften kan behandlas utan enheter.

5. Figuren här bredvid beskriver en del av gatunätet i en stad. En person går dagligen från korsningen A till korsningen B längs en kortast möjlig väg, varvid vägens längd är 4 enheter. I sådana korsningar, där två olika riktningar ger kortast möjliga vägar, väljer personen riktning genom att singla slant.



   a) Rita (skilda) diagram över alla kortast möjliga vägar och bestäm sannolikheterna för att de väljs.

   b) En annan person går från korsningen B till korsningen A och väljer en kortast möjlig väg på samma sätt. Båda personerna startar samtidigt och går med samma hastighet. Med vilken sannolikhet möter de varandra halvvägs?

6. Oändligt många klot med radierna

$$r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

   är placerade i en rad på ett bord. Med undantag för det första klotet tangerar varje klot två andra och vidare ligger klotens mittpunkter på en rät linje.

   a) Bestäm ett uttryck för radien r_n som en funktion av r_{n-1} och r_{n+1} $(n = 2, 3, \dots)$.

   b) Antag, att $r_1 = 3$ och $r_3 = 1$. Hur stor är i så fall summan av alla klotens volymer?

INSMAT 2004 **tehtävä 1**	**tehtävä 2**
Olkoon x = ohjehinta ; silloin alennettu hinta liikkeessä A = $0.8x - 10$ alennettu hinta liikkeessä B = $0.9x - 20$ Saadaan $0.8x - 10 = 0.9(0.9x - 20)$ $\Rightarrow \quad 0.01x = 8$ $\Rightarrow \quad \mathbf{x = 800}$ (euroa)	Tangentilla pisteessä $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ on yhtälö $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ eli $y - (x_0^2 + 3x_0) = (2x_0 + 3)(x - x_0).$ Yhtälö toteutuu, kun $(x,y) = (2,6)$ $\Rightarrow$ saadaan $6 - x_0^2 - 3x_0 = (2x_0 + 3)(2 - x_0)$ $= 4x_0 - 2x_0^2 + 6 - 3x_0$ eli $x_0^2 - 4x_0 = 0$, mistä saadaan ratkaisuksi $\mathbf{x_0 = 0}$ tai $\mathbf{x_0 = 4}$.

INSMAT 2004 **tehtävä 3**	**tehtävä 4**

tehtävä 3

Hetkellä *t* hiukkasen etäisyys origosta on

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(\cos t + 4\sin t)^2 + (-2\cos t + 2\sin t)^2}$$
$$= \sqrt{5\cos^2 t + 20\sin^2 t}$$
$$= \sqrt{5 + 15\sin^2 t}$$

(käytettiin tietoa $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).

Koska lausekkeen $\sin^2 t$ pienin arvo on $\sin^2 0 = 0$, on lyhin etäisyys

$$r(0) = \sqrt{5}$$

(saavutetaan myös arvoilla $t = \pm\pi$, $\pm 2\pi$ jne.).

tehtävä 4

Olkoon $t_0 \geq 1$. Moottori tekee aikavälillä $[t_0 , t_0 + 1]$ työn $4000\, w(t_0)$, missä

$$w(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt = \Big/_{t_0}^{t_0+1} \ln t + \frac{1}{t}$$

$$= \ln(t_0+1) - \ln t_0 + \frac{1}{t_0+1} - \frac{1}{t_0} .$$

Selvästi riittää etsiä funktion w maksimikohta.

$$w'(t_0) = \frac{1}{t_0+1} - \frac{1}{t_0} - \frac{1}{(t_0+1)^2} + \frac{1}{t_0^2} = \ldots = \frac{-t_0^2 + t_0 + 1}{(t_0+1)^2 t_0^2} .$$

Siis $w'(t_0) = 0 \Leftrightarrow -t_0^2 + t_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

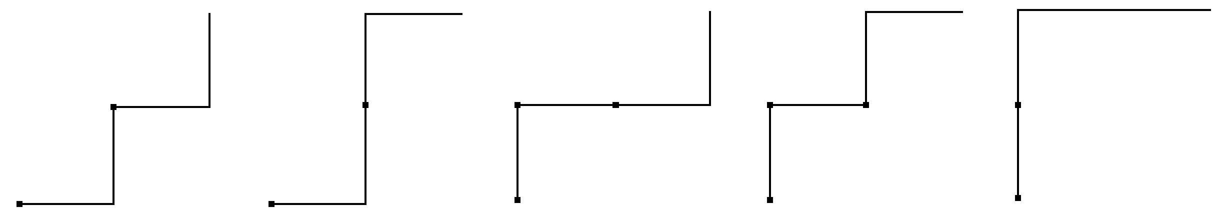
(toinen juuri < 0 $\Rightarrow$ ei kelpaa).

Derivaatan etumerkkitarkastelu $\Rightarrow$ löydetty arvo on max-kohta.

Siis kysytty väli on $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] \approx [1.618 , 2.618]$.

INSMAT 2004	**tehtävä 5**

a) Lyhimpiä reittejä on 5 kappaletta; kuvat ja todennäköisyydet:



$p_1 = \frac{1}{4}$ $p_2 = \frac{1}{4}$ $p_3 = \frac{1}{8}$ $p_4 = \frac{1}{8}$ $p_5 = \frac{1}{4}$

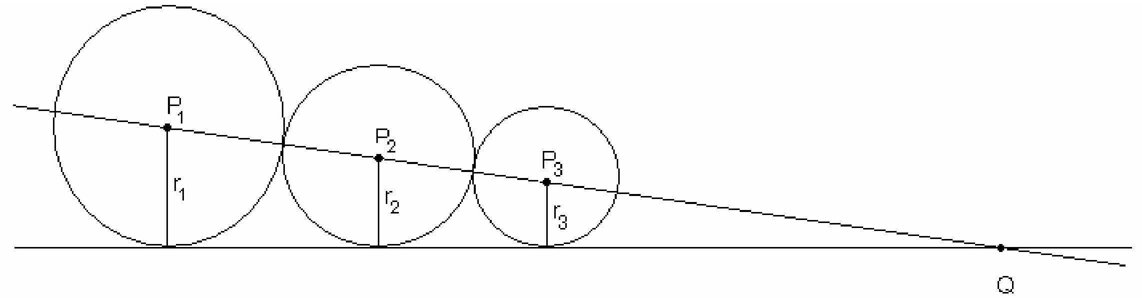
Perustelu: Reitin todennäköisyys on $\frac{1}{2^n}$, kun reitillä joudutaan heittämään lanttia n kertaa (kuvioon on merkitty pisteillä ne risteykset, joissa on heitettävä).

b) Kohtaaminen tapahtuu - jos tapahtuu - joko vasemmassa ylänurkassa tai keskipisteessä. A:sta B:hen kävelevä henkilö kulkee ylänurkan kautta tn:llä $p_5 = \frac{1}{4}$ ja keskipisteen kautta todennäköisyydellä $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{3}{4}$.
Symmetriasta nähdään, että vastaan kulkeva henkilö joutuu näihin pisteisiin aivan samoilla todennäköisyyksillä. Siis

P('kohtaavat') = P('molemmat ylänurkan kautta) + P('molemmat keskipisteen kautta')

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

INSMAT 2004 **tehtävä 6**



Tarkastellaan kolmea peräkkäistä palloa (ks. kuvio), joiden säteet ovat r_{n-1} , r_n ja r_{n+1} ; merkintöjen keventämiseksi kirjoitetaan nämä kuitenkin r_1 , r_2 , r_3 . Pallojen keskipisteet P_1 , P_2 , P_3 ovat samalla suoralla, joka kohdatkoon pöydän pinnan pisteessä Q . Tarkastellaan kuvion kolmea yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota, joiden hypotenuusat olkoot vastaavasti c_1 , c_2 , c_3 (ts. c_i = keskipisteen P_i etäisyys pisteestä Q , i = 1,2,3).

a) Yhdenmuotoisuuden nojalla on $\frac{c_1}{r_1} = \frac{c_2}{r_2} = \frac{c_3}{r_3}$, jolloin (lausutaan etäisyydet $|P_1P_2|$ ja $|P_2P_3|$ kahdella tavalla säteiden ja

c_2:n avulla) $r_1 + r_2 = c_1 - c_2 = (\frac{r_1}{r_2} - 1)c_2 = (r_1 - r_2)\frac{c_2}{r_2}$ ja vastaavasti $r_2 + r_3 = ... = (r_2 - r_3)\frac{c_2}{r_2}$.

Ratkaisemalla näistä molemmista $\frac{c_2}{r_2}$ saadaan $\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 + r_3}{r_2 - r_3} \Rightarrow ... \Rightarrow r_2^2 = r_1r_3$.

Siirtymällä alkuperäiseen merkintään: nähdään, että haettu lauseke on

$$r_n = \sqrt{r_{n-1}r_{n+1}} .$$

teht 6b) a-kohdan tarkastelujen nojalla pätee $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{r_n}{r_{n-1}}$ kaikilla $n = 2, 3, \ldots$, mistä seuraa, että kahden peräkkäisen pallon säteiden suhde on siis sama vakio

$$\alpha = \frac{r_n}{r_{n-1}}$$

kaikilla n.

Kun $r_1 = 3$ ja $r_3 = 1$, on $r_2 = \sqrt{3 \cdot 1} = \sqrt{3}$, joten $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pallojen säteet ovat r_1, $r_2 = \alpha r_1$, $r_3 = \alpha^2 r_1, \ldots$, ja niiden tilavuuksien summa on

$$\frac{4\pi}{3}(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + \ldots) = \frac{4\pi}{3} r_1^3 (1 + \alpha^3 + (\alpha^3)^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{1-\alpha^3}$$ (geometrisen sarjan summa)

$$= \frac{4\pi \cdot 27}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{108\sqrt{3}\pi}{3\sqrt{3}-1}$$