TKK, TTY, LTY, OY, ÅA / Insinööriosastot Sarja A

Valintakuulustelujen matematiikan koe 27.5.2003

Ohjeita. Sijoita *jokainen tehtävä omalle sivulleen*. Laadi *ratkaisut selkeästi välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu yliviivaamalla* se, sillä kahdesta ratkaisusta huonompi otetaan mukaan arvosteluun.

A1. Kaupungin ja sitä ympäröivän maalaiskunnan asukkaista 43 % asui kaupungissa. Seuraavien viiden vuoden aikana kaupungin väkiluku lisääntyi 12,4 % ja maalaiskunnan 2,6%.

a) Kuinka monta prosenttia väestön määrä kasvoi kyseisellä alueella?

b) Kuinka monta prosenttia asukkaista asui kaupungissa ajanjakson lopussa?

A2. Termoskannuun kaadetaan kiehuvaa vettä ja kannu suljetaan välittömästi. Kannussa veden lämpötila y (Celsius-asteina) muuttuu kaavan

$$y = 20 + 80e^{-t/1200}$$

mukaisesti. Tässä t on aika minuutteina kannun sulkemisesta alkaen.

a) Mikä on veden lämpötila kannussa 8 tunnin kuluttua? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

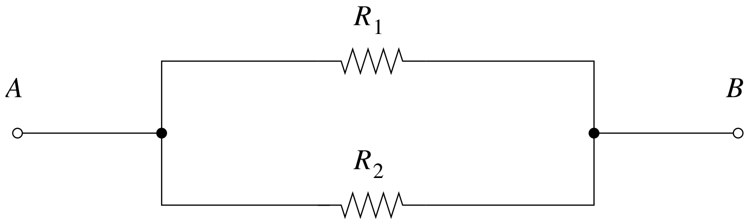
b) Kuinka pitkään veden lämpötila on vähintään 64 °C? Anna vastaus tunteina ja minuutteina minuutin tarkkuudella.

c) Mikä on veden jäähtymisnopeus $\frac{dy}{dt}$ kannussa 8 tunnin kuluttua? Anna vastaus yksiköissä °C/h.

A3. Laske suoran $y = x$, käyrän $y = \frac{1}{7x+6}$ ja y-akselin rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala.

A4. Kuvioiden mukaiset virtapiirit ovat täysin toimivia, jos virta kulkee pisteestä A pisteeseen B kumpaakin reittiä. Ne ovat osittain toimivia, jos virta kulkee pisteestä A pisteeseen B jompaakumpaa reittiä, mutta ei molempia. Oletamme, että kaikki toimintavirheet aiheutuvat piirin vastuksista. Todennäköisyys sille, että tyypiä R_1 oleva vastus on viallinen, on $p_1 = 0{,}09$. Tyypiä R_2 oleva vastus on viallinen todennäköisyydellä $p_2 = 0{,}17$. Lisäksi oletamme, että piirin kunkin vastuksen toimivuus tai viallisuus on riippumaton piirin muiden vastuksien toimivuudesta tai viallisuudesta.

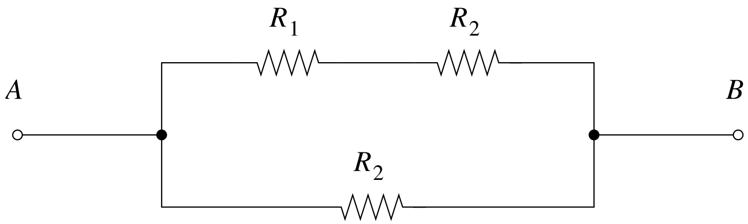
a) Millä todennäköisyydellä virtapiiri 1 on täysin toimiva?



Virtapiiri 1

b) Millä todennäköisyydellä virtapiiri 2 ei ole täysin toimiva?

c) Millä todennäköisyydellä virtapiiri 2 on osittain toimiva?



Virtapiiri 2

A5. Puoliympyrän (säde 30 metriä) muotoinen tori rajoittuu suoralta sivultaan katuun. Torille pystytetään pohjaltaan suorakulmion muotoinen esityslava, jonka katua lähin reuna on kadun suuntainen ja 10 metrin etäisyydellä kadusta.

Määritä lavan suurin mahdollinen pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.

A6. Vanhan tornikellon tuntiviisarin pituus on 1 metri ja minuuttiviisarin pituus r metriä.

Mikä on viisarien kärkien välinen etäisyys, kun kello on 4?

Millä nopeudella viisarien kärjet lähestyvät toisiaan, kun kello on 4?

© TKK 2003

TH, TTU, VTU, UU, ÅA / Ingenjörsavdelningarna Serie A

Inträdesförhör i matematik 27.5.2003

Anvisningar. Placera *varje uppgift på egen sida*. Ge *klart utarbetade lösningar inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar bör överstryckas*. Om icke-överstruckna lönsningar föreligger, så bedöms den sämre av dessa.

A1. Av invånarna i en stad och dess omgivande landskommun bodde 43 % i staden. Under de följande fem åren ökade stadens invånarantal med 12,4 % och landskommunens med 2,6%.

a) Med hur många procent ökade invånarantalet i området ifråga?

b) Hur många procent av invånarna bodde i staden i slutet av perioden?

A2. Hett vatten hälls i en termoskanna, varefter kannan tillslutes. Vattnets temperatur y (i Celsius-grader) i kannan följer formeln

$$y = 20 + 80e^{-t/1200}$$

Här betecknar t antalet minuter efter tillslutningen av kannan.

a) Bestäm vattnets temperatur i kannan efter 8 timmar. Svar med en grads noggrannhet.

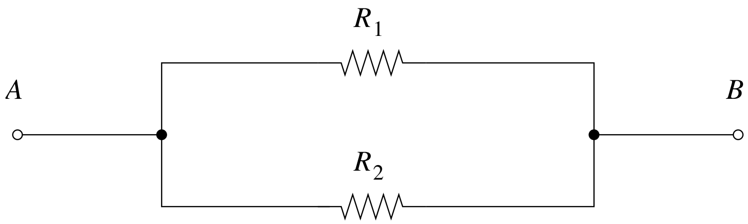
b) Hur länge är vattnets temperatur minst 64 °C? Svar i timmar och minuter med en minuts noggrannhet.

c) Bestäm vattnets avsvalningshastighet $\frac{dy}{dt}$ i kannan efter 8 timmar. Svar i enheten °C/h.

A3. Bestäm arean av det ändliga område som begränsas av den räta linjen $y = x$, kurvan $y = \frac{1}{7x+6}$ och y-axeln.

A4. Strömkretsarna i figurerna är fullt fungerande om strömmen löper från punkten A till punkten B längs båda vägarna. De är delvis fungerande om strömmen löper från punkten A till punkten B längs den ena vägen, men ej längs båda. Vi antar att alla funktionsfel orsakas av motstånden i kretsen. Sannolikheten att ett motstånd av typ R_1 är defekt, är $p_1 = 0{,}09$. Ett motstånd av typ R_2 är defekt med sannolikheten $p_2 = 0{,}17$. Vi antar vidare att varje motstånds funktionsduglighet eller felaktighet är oberoende av kretsens övriga motstånds funktionsduglighet eller felaktighet.

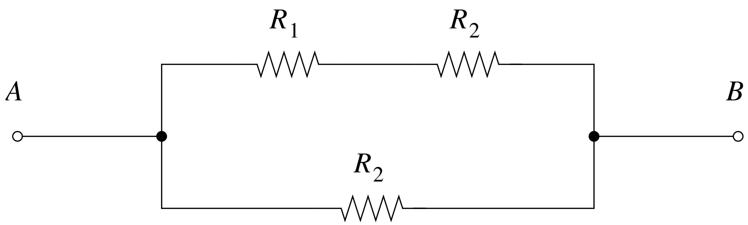
a) Med vilken sannolikhet är krets 1 fullt fungerande?



Strömkrets 1

b) Med vilken sannolikhet är krets 2 ej fullt fungerande?

c) Med vilken sannolikhet är krets 2 delvis fungerande?



Strömkrets 2

A5. Ett halvcirkelformat (radie 30 meter) torg gränsar med sin raka sida direkt till en gata. På torget uppförs en estrad med rektangulär botten. Estradens närmast gatan liggande kant är parallell med gatan och på 10 meters avstånd från denna.

Bestäm estradens största möjliga area med en noggrannhet av en kvadratmeter.

A6. Timvisaren i ett gammalt tornur är 1 meter lång. Minutvisarens längd är r meter.

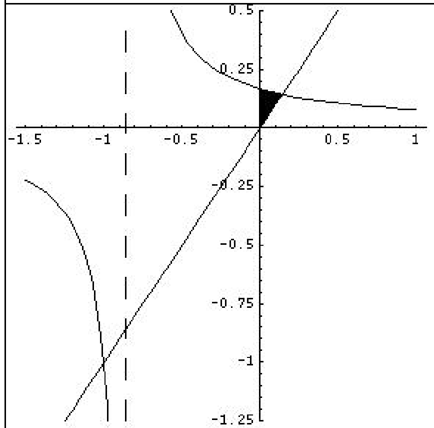
Bestäm avståndet mellan visarnas spetsar, då klockan är 4.

Med vilken hastighet närmar sig visarnas spetsar varandra, då klockan är 4?

© TH 2003

INSMAT 2003 **tehtävä 1**	**tehtävä 2**
Ratkaisussa väkiluvut on ilmoitettu prosentteina perusarvosta, joka a)-kohdassa on alueen väkiluku tarkastelujakson alussa ja b)-kohdassa vastaava väkiluku tarkastelujakson lopussa. väkiluku alussa : 43 % + 57 % = 100 % väkiluku lopussa : $1.124 \cdot 43\,\% + 1.026 \cdot 57\,\% =$ $= 48.332\,\% + 58.482\,\% =$ $= 106.814\,\%$ Siis a) väestö kasvoi **6.8 %** , b) kaupunkilaisten osuus lopussa oli $\frac{48.332}{106.814} = 0.4524\ldots \approx$ **45 %** .	8 tuntia = 480 min a) $y = 20 + 80e^{-480/1200} = 73.62\ldots \approx$ **74** ^{o}C b) $20 + 80e^{-t/1200} \geq 64 \Leftrightarrow -\frac{t}{1200} \geq \ln\left(\frac{44}{80}\right)$ $\Leftrightarrow t \leq -1200 \ln\left(\frac{44}{80}\right) = 717.404\ldots$ (min) $\approx$ **11 h 57 min** c) $\frac{dy}{dt} = -\frac{80}{1200} e^{-\frac{t}{1200}}$ Kun t = 480 , on $\frac{dy}{dt} = -\frac{80}{1200} e^{-\frac{480}{1200}} =$ $= -0.04468\ldots$ ^{o}C/min $= -2.681\ldots$ ^{o}C/h $\approx$ **- 2.7** ^{o}C/h

INSMAT 2003 **tehtävä 3**



leikkauspiste: $x = \dfrac{1}{7x+6} \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 + 6x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{7}$ (toinen juuri $x = -1$ ei kelpaa (kuva!))

Siis ala $= \displaystyle\int_0^{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7x+6} - x \right) dx =$

$= \dfrac{1}{7}(\ln(1+6) - \ln 6) - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{7^2} =$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{7}\ln\left(\dfrac{7}{6}\right) - \dfrac{1}{98}}$ (= 0.01181…)

tehtävä 4

a) P('täysin toimiva') $= (1 - p_1)(1 - p_2) = 0.91 \cdot 0.83 =$

$= 0.7553 \approx$ **0.76**

b) P('ei täysin toimiva') = 1 – P('täysin toimiva') =

$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)^2 =$

$= 1 - 0.91 \cdot 0.83^2 = 0.373101$

$\approx$ **0.37**

c) Merkitään P('ylempi toimii') = q ; silloin

$q = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0.7553$.

Lisäksi P('alempi toimii') = $1 - p_2$.

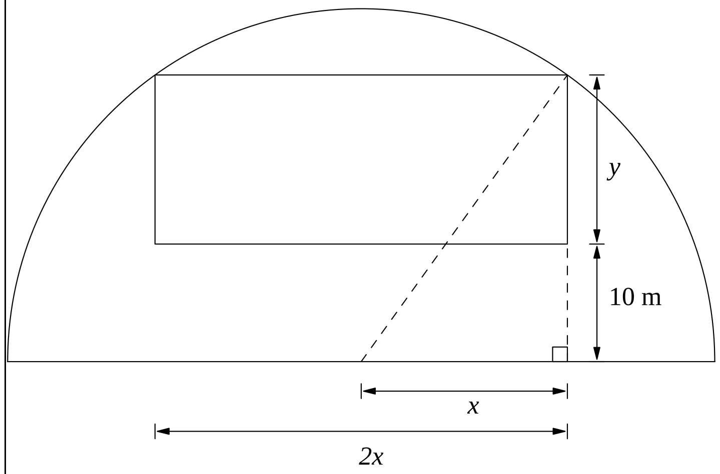
Nyt P('osittain toimiva') =

= P('y toimii, a ei toimi') + P('y ei toimi, a toimii') =

$= q\, p_2 + (1 - q)(1 - p_2) = 0.7553 \cdot 0.17 + 0.2447 \cdot 0.83 =$

$= 0.331502 \approx$ **0.33**

INSMAT 2003 **tehtävä 5**



Ala on $A = 2xy$ (ks. kuvio), missä $x^2 + (y + 10)^2 = 30^2$. Siis $A(y) = 2y\sqrt{30^2-(y+10)^2}$, missä $0 \le y \le 20$.
Funktio A on derivoituva ja positiivinen paitsi välin päätepisteissä, joissa se saa arvon 0.
Siis maksimi saavutetaan A':n 0-kohdassa.

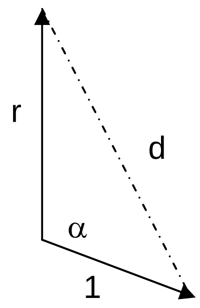
$$A'(y) = 2\sqrt{30^2-(y+10)^2} - \frac{2y(y+10)}{\sqrt{30^2-(y+10)^2}} ,$$

ja ehto $A'(y) = 0$ johtaa yhtälöön $y^2 + 15y - 400 = 0$, jonka ainoa ratkaisu välillä $0 \le y \le 20$ on

$y_0 = \frac{5}{2}(-3 + \sqrt{73}) \approx 13.860\ldots$ (m). Tällöin ($x \approx 18.185\ldots$ ja) ala on $A(y_0) = 504.09\ldots \approx$ **504 m²** .

INSMAT 2003 **tehtävä 6**

Olkoon kärkien välinen etäisyys d ja olkoon viisarien välinen kulma α .



etäisyys kun kello on 4 : kosinilause

$\Rightarrow \quad d^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\alpha = 1 + r^2 + r$,

sillä $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, jolloin $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Siis $d = \sqrt{\mathbf{1+r+r^2}}$.

lähestymisnopeus : Määritellään aikamuuttuja t siten, että t:n yksikkö on tunti ja klo 4 vastaa arvoa t = 0 .
Tarkastellaan kulmaa ajan funktiona $\alpha(t)$ ja vastaavasti etäisyyttä funktiona d(t).

Minuuttiviisari kiertyy myötäpäivään nopeudella 2π (radiaania/h) ja tuntiviisari vastaavasti nopeudella $\frac{1}{12}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

Silloin viisarien välinen kulman muutosnopeus on $\alpha'(t) = \left(\frac{1}{12} - 1\right)2\pi = \frac{-11\pi}{6}$, kun t $\approx$ 0, erityisesti $\alpha'(0) = \frac{-11\pi}{6}$.

Etäisyyden muuttumisnopeus hetkellä t = 0 on d'(0) , joka saadaan kosinilauseen kaavasta $d(t)^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\alpha(t))$ puolittain derivoimalla ja sijoittamalla t = 0 :

$$2\,d(t)\,d'(t) = 2r\sin(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) \quad \Rightarrow \quad d'(0) = \frac{r\cdot\sqrt{3}/2}{\sqrt{1+r+r^2}}\cdot\frac{-11\pi}{6} = -\,\frac{\mathbf{11\sqrt{3}\pi}}{\mathbf{12}}\cdot\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{1+r+r^2}}} \qquad \text{(m/h)}$$