HTKK, TTKK, LTKK, OY, ÅA / Insinööriosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 29.5.2002

Sarja A

**Ohjeita:** Sijoita **jokainen tehtävä omalle sivulleen**. Laadi **ratkaisut selkeästi välivaiheineen**, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. **Merkitse hylkäämäsi ratkaisu yliviivaamalla** se (saman tehtävän kahdesta ratkaisusta huonompi otetaan mukaan arvosteluun).

A1. Lehdenjakajalla on kaksi herätyskelloa, joista parempi toimii todennäköisyydellä 0,95 ja huonompi todennäköisyydellä 0,60 toisistaan riippumatta. Lehdenjakaja virittää molemmat kellot. Millä todennäköisyydellä

a) molemmat kellot soivat,
b) ainakin yksi kelloista soi,
c) vain yksi kelloista soi?

A2. Määritä yhtälön

$$\frac{4|x+1|}{x-2} = \frac{7}{|x-5|}$$

kaikki ratkaisut.

A3. Puuseppä valmistaa ohuesta rimasta 5-kulmion muotoisia kehikoita (Kuva 1), joiden pinta-ala on $A = 6,00\ m^2$. Kukin kehikko koostuu suorakulmiosta, jonka leveys on $L = 2,85\ m$ ja korkeus $h$, ja tasakylkisestä kolmiosta, jonka kylki on $s$. Kuinka $h$ ja $s$ tulee valita, jotta rimaa kuluisi mahdollisimman vähän? (Vastaus metreissä kahden desimaalin tarkkuudella.)

A4. Eräässä T-risteyksessä tehtiin liikennelaskentaa (Kuva 2). Laskenta-aikana suunnasta A risteykseen tuli 370 autoa ja suuntaan A risteyksestä lähti 460 autoa. Vastaavasti risteykseen suunnasta B tuli 410 ja risteyksestä suuntaan B lähti 530 autoa. Lisäksi havaittiin, että suunnasta C suuntaan A kääntyi $n_{CA} = 190$ autoa. (Risteyksessä autot voivat ajaa suoraan tai kääntyä normaalisti, U-käännös on kielletty.)

a) Olkoon suunnasta C risteykseen saapuneiden autojen määrä $x$. Mikä on määrän $x$ pienin mahdollinen arvo?
b) Mikä autojen määrä $x$ on, jos lisäksi tiedetään, että suunnasta A risteykseen tulevista autoista ajoi suoraan $n_{AB} = 120$ autoa.

Perustele ratkaisusi huolellisesti.

A5. Olkoon $F(x)$ funktion

$$f(x) = \begin{cases} 7 + x + \cos(\pi x) & \text{kun } x < 1 \\ 7 & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

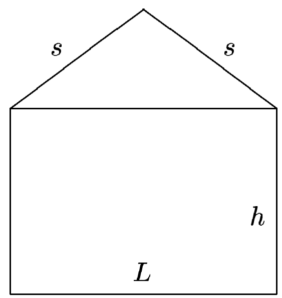
integraalifunktio, jolle $F(-1) = 0$. Määritä $F(0)$ ja $F(\pi)$.

A6. Potilaan syöpäkudos lisääntyy luontaisesti $p\%$ viikossa. Potilaalle päätetään antaa sädehoitoa, jossa viikottainen säteilyannos tuhoaa (välittömästi) $a$ grammaa syöpäkudosta. Kun sädehoito alkaa, syöpäkasvaimen koko on $M$ grammaa.

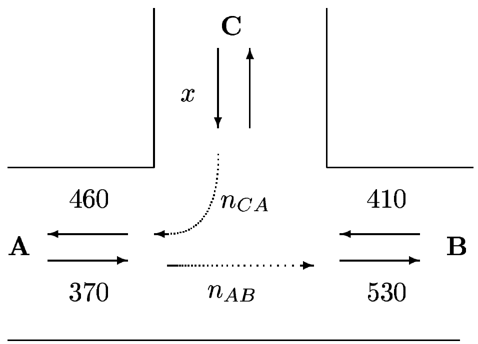
Kuinka suuri $M$ voi enintään olla, jotta kasvain saataisiin tuhotuksi $n$ viikon kuluessa hoidon alkamisesta?

Mikä $M$ voi enintään olla (täysissä grammoissa), kun $p = 2$ (%), $a = 4$ (grammaa) ja $n = 28$ (viikkoa)?






*Kuva 1*




*Kuva 2*

**Anvisningar:** Placera **varje uppgift på egen sida**. Ge **klart utarbetade lösningar inklusive mellanstadier**, renskriv lösningen vid behov. **Förkastade lösningar bör överstryckas** (om två icke-överstruckna lösningar föreligger på samma uppgift, så bedöms den sämre av dessa).

A1. Ett tidninsgbud har två väckarklockor. Den bättre klockan fungerar med sannolikheten 0,95 och den sämre med sannolikheten 0,60 oberoende av varandra. Tidningsbudet ställer in vardera klockan. Bestäm sannolikheten för att

a) vardera klockan ringer,
b) åtminstone en av klockorna ringer,
c) exakt en av klockorna ringer.

A2. Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\frac{4|x+1|}{x-2} = \frac{7}{|x-5|}.$$

A3. En snickare tillverkar 5-kantiga ramar (Figur 1) av tunna ribbor. Ramarna har arean $A = 6,00\, m^2$. Varje ram består av en rektangel med bredden $L = 2,85\, m$ och höjden $h$, och en likbent triangel med benlängden $s$. Hur bör $h$ och $s$ väljas, om man vill minimera åtgången av ribba? (Svar med två decimaler.)

A4. I en T-korsning utfördes en trafikräkning (Figur 2). Under räkningens gång anlände 370 bilar från rikning A, medan 460 bilar avlägsnade sig i rikning A. Från riktning B anlände 410 bilar, och i rikning B avlägsnade sig 530 bilar. Vidare observerades, att $n_{CA} = 190$ bilar svängde in från rikning C till rikning A. (I korsningen kan bilarna köra rakt eller vända normalt; U-svängar är förbjudna.)

a) Låt $x$ vara antalet bilar som anlände till korsningen från rikning C. Vilket är det minsta möjliga värdet på $x$?
b) Vilket värde fås på $x$, om man ytterligare vet, att $n_{AB} = 120$ av de från rikning A inkommande bilarna fortsatte rakt fram?

Begrunda din lösning noggrant.

A5. Låt $F(x)$ vara den primitiva funktion (integralfunktion) till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 7 + x + \cos(\pi x) & \text{om } x < 1 \\ 7 & \text{om } x \geq 1 \end{cases}$$

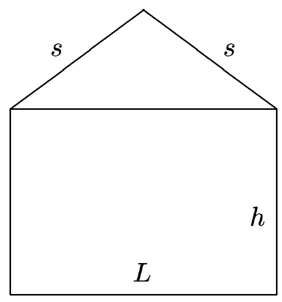
för vilken $F(-1) = 0$. Bestäm $F(0)$ och $F(\pi)$.

A6. En patients canvervävnad växer naturligt $p$% per vecka. Man besluter att varje vecka ge patienten en strålningsdos, som förstör (omedelbart) $a$ gram av cancervävnaden. Då strålbehandlingen inleds, är cancersvulstens storlek $M$ gram.

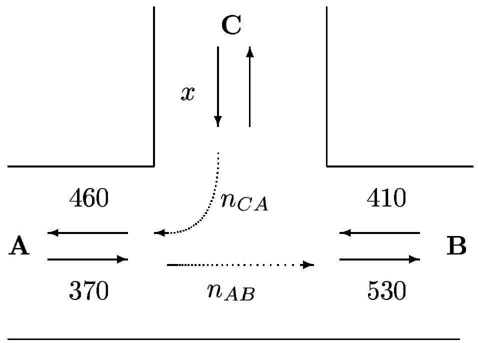
Hur stor kan $M$ högst vara, om hela svulsten bör vara förstörd $n$ veckor efter behandlingens inledning?

Vilket blir värdet på $M$ (i hela gram) högst, om $p = 2$ (%), $a = 4$ (gram) och $n = 28$ (veckor)?





*Figur 1*



*Figur 2*

| INSMAT 2002 **tehtävä 1** sarja A | sarja B | sarja C | sarja D | pisteytys |
|---|---|---|---|---|
| P(”parempi kello soi”) = p = 0.95<br>P(”huonompi kello soi”) = q = 0.60 | p = 0.85<br>q = 0.60 | p = 0.95<br>q = 0.40 | p = 0.85<br>q = 0.40 | |
| a) P(”molemmat soivat”) = pq = 0.95·0.60 = 0.57 | 0.51 | 0.38 | 0.34 | 2p |
| b) P(”ainakin yksi soi”) = 1 – (1-p)(1-q) = 1 – 0.05·0.40 = 0.98 | 0.94 | 0.97 | 0.91 | 2p |
| c) P(”tasan yksi soi”) = p(1-q) + (1-p)q = 0.95·0.40 + 0.05·0.60 = 0.41 | 0.43 | 0.59 | 0.57 | 2p |

| INSMAT 2002 **tehtävä 2** sarja A | sarja B | sarja C | sarja D | pisteytys |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{4\lvert x+1\rvert}{x-2} = \frac{7}{\lvert x-5\rvert} \Leftrightarrow 4\lvert(x+1)(x-5)\rvert = 7x-14$ ja<br>$x \ne 2,\ x \ne 5$ | $2\lvert(x+1)(x-5)\rvert =$<br>$= 9x - 18$ | $4\lvert(x+1)(x-5)\rvert =$<br>$= -7x + 14$ | $2\lvert(x+1)(x-5)\rvert =$<br>$= -9x + 18$ | |
| tapaus $x < -1$ tai $x > 5$ : Saadaan<br>$4x^2 - 16x - 20 = 7x - 14$<br>$\Leftrightarrow 4x^2 - 23x - 6 = 0$, mistä<br>$x = \frac{23\pm\sqrt{625}}{8} = \frac{23\pm 25}{8} = \begin{cases} 6 & \text{ok,} \\ -\frac{1}{4} & \text{ei käy.} \end{cases}$ | $2x^2 - 17x + 8 = 0$<br>$x = \frac{17\pm\sqrt{225}}{4}$<br>$\Rightarrow x = 8$<br>($x = \frac{1}{2}$ ei käy) | $4x^2 - 9x - 34 = 0$<br>$x = \frac{9\pm\sqrt{625}}{8}$<br>$\Rightarrow x = -2$<br>($x = 4\frac{1}{4}$ ei käy) | $2x^2 + x - 28 = 0$<br>$x = \frac{-1\pm\sqrt{225}}{4}$<br>$\Rightarrow x = -4$<br>($x = 3\frac{1}{2}$ ei käy) | tapauksiin jako<br>+ sievennys<br>(2. ast. yhtälöt):<br>3p |
| tapaus $-1 \le x < 5$ : Saadaan<br>$-4x^2 + 16x + 20 = 7x - 14$<br>$\Leftrightarrow 4x^2 - 9x - 34 = 0$, mistä<br>$x = \frac{9\pm\sqrt{625}}{8} = \frac{9\pm 25}{8} = \begin{cases} 4\frac{1}{4} & \text{ok,} \\ -2 & \text{ei käy.} \end{cases}$ | $2x^2 + x - 28 = 0$<br>$x = \frac{-1\pm\sqrt{225}}{4}$<br>$\Rightarrow x = 3\frac{1}{2}$<br>($x = -4$ ei käy) | $4x^2 - 23x - 6 = 0$<br>$x = \frac{23\pm\sqrt{625}}{8}$<br>$\Rightarrow x = -\frac{1}{4}$<br>($x = 6$ ei käy) | $2x^2 - 17x + 8 = 0$<br>$x = \frac{17\pm\sqrt{225}}{4}$<br>$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$<br>($x = 8$ ei käy) | juuret + käypyys-<br>ehtojen huomiointi:<br>3p |
| Siis ratkaisu: $x = 6$ tai $x = 4\frac{1}{4}$ | $x = 8$ tai $x = 3\frac{1}{2}$ | $x = -2$ tai $x = -\frac{1}{4}$ | $x = -4$ tai $x = \frac{1}{2}$ | |

<table>
<tr><th>INSMAT 2002 tehtävä 3 sarja A</th><th>sarja B</th><th>sarja C</th><th>sarja D</th><th>pisteytys</th></tr>
<tr><td>Kolmion korkeus on $\sqrt{s^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}$ , joten kehikon ala on $A = Lh + \frac{L}{2}\sqrt{s^2-\frac{L^2}{4}}$<br>$\Rightarrow\ h = \frac{A}{L} - \frac{1}{2}\sqrt{s^2-\frac{L^2}{4}}$, missä $A = 6$ ja $L = 2.85$ .<br>Tarvittavan riman pituus = $f(s) = 2L + 2h + 2s = 2L + \frac{2A}{L} - \sqrt{s^2-\frac{L^2}{4}} + 2s$ ,<br>(missä $\frac{L}{2} \le s \le \sqrt{\frac{4A^2}{L^2}+\frac{L^2}{4}}$ (yläraja saadaan asettamalla $h = 0$)).</td><td>L = 2.95</td><td>L = 2.75</td><td>L = 2.65</td><td>2p</td></tr>
<tr><td><u>f:n minimikohta</u>: $f'(s) = \frac{-s}{\sqrt{s^2-\frac{L^2}{4}}} + 2$ ;<br>siis $f'(s) = 0 \Rightarrow \frac{s^2}{4} = s^2 - \frac{L^2}{4} \Rightarrow s = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 1.65$<br>Tällöin $h = \frac{A}{L} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{4}} = \frac{A}{L} - \frac{L}{4\sqrt{3}} \approx 1.69$</td><td>s = 1.70<br>h = 1.61</td><td>s = 1.59<br>h = 1.78</td><td>s = 1.53<br>h = 1.88</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>Huomataan, että löydetty piste $s_0 = \frac{L}{\sqrt{3}}$ on määrittelyvälillä ( = [1.425, 4.45] )<br>Että piste $s_0 =$ on todella f:n minimikohta, voidaan perustella esim.<br>1. tarkastelemalla f:n arvoja pisteessä $s_0$ ja päätepisteissä, tai<br>2. tutkimalla derivaatan f ’ merkkiä pisteen $s_0$ eri puolilla, tai<br>3. toteamalla (laskemalla), että $f''(s_0) > 0$ .</td><td>[1.475, 4.33]</td><td>[1.375, 4.58]</td><td>[1.325, 4.72]</td><td>2p</td></tr>
</table>

| INSMAT 2002 **tehtävä 4** | pisteytys |
|---|---|
| Käytetään merkintöjä $n_{AB}$ jne kuten tehtävänannossa.<br><br>Oletukset: $\begin{cases} n_{AB} + n_{AC} = 370 \\ n_{AB} + n_{CB} = 530 \\ n_{CA} = 190 , \end{cases}$<br><br>missä $n_{AB}, \ldots, n_{CA} \geq 0$ .<br><br>(Lisäksi oletuksista saadaan $n_{BA} + n_{CA} = 460$ ja $n_{BA} + n_{BC} = 410$ , mutta näitä tietoja ei tarvita ratkaisussa.)<br><br>Tarkasteltava lukumäärä on $x = n_{CA} + n_{CB} = 190 + n_{CB}$ . | |
| a) $n_{CB} = 530 - n_{AB}$ ja<br><br>$n_{AB} \leq 370$ , sillä $n_{AB} + n_{AC} = 370$ ja $n_{AC} \geq 0$ .<br><br>Siis $n_{CB} \geq 530 - 370 = 160$ , joten $x \geq 190 + 160 = 350$ . | a)-kohta 3p<br><br>b)-kohta 3p |
| b) Jos $n_{AB} = 120$ , niin $n_{CB} = 530 - 120 = 410 \Rightarrow x = 190 + 410 = 600$ . | |

| INSMAT 2002 **tehtävä 5** sarja A | sarja B | sarja C | sarja D | pisteytys |
|---|---|---|---|---|
| $F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} 7x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + C_1 \text{ , kun } x < 1, \\ 7x + C_2 \text{ , kun } x \geq 1. \end{cases}$ | $6x + \ldots + C_1$<br>$6x + C_2$ | $5x + \ldots + C_1$<br>$5x + C_2$ | $4x + \ldots + C_1$<br>$4x + C_2$ | |
| Ehdosta $F(-1) = 0$ saadaan $-7+\frac{1}{2}+0+C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{13}{2}$ . | $C_1 = \frac{11}{2}$ | $C_1 = \frac{9}{2}$ | $C_1 = \frac{7}{2}$ | |
| Siis $F(x) = 7x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{13}{2}$ , kun $x < 1$ , joten $F(0) = \frac{13}{2}$ . | $F(0) = \frac{11}{2}$ | $F(0) = \frac{9}{2}$ | $F(0) = \frac{7}{2}$ | 3p |
| F:n on oltava jatkuva, erityisesti pisteessä 1 (muualla selvää). | | | | |
| Kun $x \to 1-$ , niin $F(x) \to 7 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{13}{2} = 14$ , ja tämän raja-arvon on oltava sama kuin $F(1) = 7\cdot 1 + C_2$ . Siis $C_2 = 14 - 7 = 7$, jolloin | $F(x) \to 6$<br>$C_2 = 6$ | $F(x) \to 5$<br>$C_2 = 5$ | $F(x) \to 4$<br>$C_2 = 4$ | |
| $F(\pi) = 7\pi + 7$ . | $F(\pi) = 6\pi + 6$ | $F(\pi) = 5\pi + 5$ | $F(\pi) = 4\pi + 4$ | 3p |

| INSMAT 2002 **tehtävä 6** | pisteytys |
|---|---|
| Olkoon $x_n$ = kasvaimen koko n viikon kuluttua (eli n+1. hoitokerran jälkeen) .<br>Merkitään $q = 1 + p/100$ .<br>Silloin $x_0 = M - a$ ,<br>$x_1 = q\,x_0 - a = q\,M - (1+q)\,a$ ,<br>$x_2 = q\,x_1 - a = q^2 M - (1+q+q^2)\,a$<br>jne, yleisesti<br>$x_n = q\,x_{n-1} - a = q^n M - (1+q+\ldots+q^n)\,a = q^n M - \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\cdot a$ . | 3p |
| Siis $x_n \le 0 \Leftrightarrow q^n M - \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\cdot a \le 0$<br>$\Leftrightarrow M \le \frac{1}{q^n}\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\cdot a$ eli $M \le \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}\cdot\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{\frac{p}{100}}\cdot a$ .<br>Annetuilla arvoilla ($q = 1.02$) saadaan $M \le \frac{1}{1.02^{28}}\cdot\frac{1.02^{29}-1}{0.02}\cdot 4 = 89.125$ , ts. gramman tarkkuudella ilmaistuna $M \le 89$ (g) .<br>(Voidaan tulkita myös näin: Jos $n = 28$, voidaan päätellä $M < 90$ (mutta ei voida päätellä $m \le 89$). Siksi hyväksytään myös vastaus $M < 90$ .) | 3p |