Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. Yleisesti tehtävän ratkaisun tulisi sisältää myös annetun vastauksen perustelut.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 Arkkitehti A rentoutuu suunnistusreitillä. Ensimmäinen rasti on 600 m lähtöpisteestä koilliseen, toinen on ensimmäisestä rastista 1600 m etelään, ja kolmas on toisesta rastista 1800 m suuntaan 12° lännestä pohjoiseen päin. Löydettyään kolmannen rastin A päättää keskeyttää.

(a) Kuinka kaukana toinen rasti on lähtöpisteestä?

(b) Mihin suuntaan A:n on suunnistettava kolmannelta rastilta päästäkseen suorinta tietä takaisin lähtöpisteeseen?

Anna kohdassa (a) etäisyys 10 metrin ja kohdassa (b) suunta suhteessa lähimpään pääilmansuuntaan yhden asteen tarkkuudella.

A2 Nelikulmion kärjet (myötäpäivään) ovat A,B,C ja D ja niitä vastaavat kulmat a,b,c ja d. Tiedämme, että $a = 15°$, $b = 30°$, $c = 45°$, $|AB| = |BC|$ ja $|AD| = 1$. Laske $|AC|$.

A3 (a) Ratkaise $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{x-3}$

(b) Ratkaise $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x-4}$

A4 Nurmikentän ympäröimälle, tasasivuisen kolmion muotoiselle alueelle suunnitellaan istutettavan N kpl kuusentaimia säännöllisin välimatkoin: Ensin istutetaan taimet kolmion kärkiin. Sitten istutetaan taimia tasavälein kolmion sivuille siten, että jokaisen istutettavan taimen etäisyys kahteen lähimpään taimeen on a. Lopuksi istutetaan taimet kolmion sisään siten, että jokaisen etäisyys kuuteen lähimpään taimeen on a.

(a) Piirrä kaaviokuva istutuksesta, jossa $N = 10$.

(b) Sama suunnitelma toteutetiin juhlistamaan myös vuotta N, jolloin merkkimies S kuoli. Mikä vuosi N on, kun $1900 \le N \le 1999$?

A5 Laakson pohjalla on järvi. Kartan koordinaatistossa, jossa positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen, noudattaa maan pinnan korkeus pisteessä $P = (x, y)$ järven lähiympäristössä kaavaa

$$h = 9x^2 + 6y^2 - 4xy + 36x - 8y,$$

missä x ja y ilmaistaan kilometreissä. Kaava antaa korkeuden järven pinnan tasosta metreissä. Jos $h < 0$, on piste P järvellä, ja järven syvyys pisteessä P on $-h$. Järven rantaviivalla on $h = 0$. Lossin kulkureitti kartalla on pitkin suoraa $y = 4/3$ järven rannalla olevasta pisteestä A vastarannan pisteeseen B.

(a) Onko piste $(-1, -1)$ maalla, järvellä vai rantaviivalla?

(b) Määritä lossin kulkureitin päätepisteet A ja B.

(c) Mikä on järven suurin syvyys lossin kulkureitillä?

A6 Kuution jokaisesta kärjestä leikataan pois tetraedrin muotoinen pala siten, että syntyy 14-tahokas, jonka kaikkin särmät ovat yhtä pitkät. Määritä alkuperäisen kuution ja 14-tahokkaan särmien pituuksien suhde. Huomioi, että ratkaisuja on kaksi ja piirrä niistä havainnekuvat.

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida.* Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen. Generellt borde lösningen omfatta även argumentationen för det givna svaret.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 Arkitekten A kopplar av genom att orientera. Första kontrollen är 600 m nordost om startpunkten, andra kontrollen 1600 m söder om första kontrollen och tredje kontrollen är på 1800 m avstånd från andra kontrollen i riktningen 12° norr om väst. Efter att ha funnit tredje kontrollen avbryter A orienteringen.

(a) Hur långt från startpunken är den andra kontrollen?

(b) I vilken rikting skall A gå från tredje kontrollen för att återvända raka vägen till startpunkten?

Ge (a) avståndet med 10 meters noggrannhet och (b) riktningen i förhållande till det närmaste huvudväderstrecket med en grads noggrannhet.

A2 Fyrhörningens hörn (motsols) är A,B,C och D och motsvarande vinklar a,b,c och d. Vi vet, att $a = 15°$, $b = 30°$, $c = 45°$, $|AB| = |BC|$ och $|AD| = 1$. Beräkna $|AC|$.

A3 (a) Lös $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{x-3}$

(b) Lös $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x-4}$

A4 Man planerar att plantera N stycken granplantor på ett område i form av en liksidig triangel på en äng. Först planteras plantor i triangelns hörn. Därefter planteras plantor med jämna mellanrum på triangelns sidor så att avståndet från varje planterad planta till dess två närmaste grannar är a. Slutligen planteras granplantor även i triangelns innandöme så att varje plantas avstånd till dess sex närmaste grannar är a.

(a) Skissa planteringen då $N = 10$.

(b) Samma schema användes också för att högtidliggöra året N, då den bemärkte personen S dog. Vilket år är N, då $1900 \leq N \leq 1999$?

A5 I bottnet av en dal finns en sjö. I kartans koordinatersystem, där positiva x-axeln pekar österut och positiva y-axeln norrut ges markens höjd i punken $P(x, y)$ i en omgivning av sjön av formeln

$$h = 9x^2 + 6y^2 - 4xy + 36x - 8y,$$

där x och y ges i kilometer. Formeln ger höjden från sjöns nivå i meter. Om $h < 0$ är punkten P i sjön och sjöns djup i punkten P är $-h$. Sjöns strandlinje ges av $h = 0$. En färja har som sin rutt linjen $y = 4/3$ på kartan från punkten A på standen till punkten B på motsatta stranden.

(a) Är punkten $(-1, -1)$ på land, i sjön eller på stranden?

(b) Bestäm ändpunkterna A och B för färjans rutt.

(c) Vad är sjöns största djup längs färjans rutt?

A6 Tetraedersformade bitar skärs bort från hörnen i en kub så att en 14-siding uppstår vars alla kanter är lika långa. Bestäm förhållandet mellan den ursprungliga kubens och 14-sidingens kantlängder. Observera att det finns två lösningar samt rita figurer för att åskådliggöra dessa.

Tehtävä 1

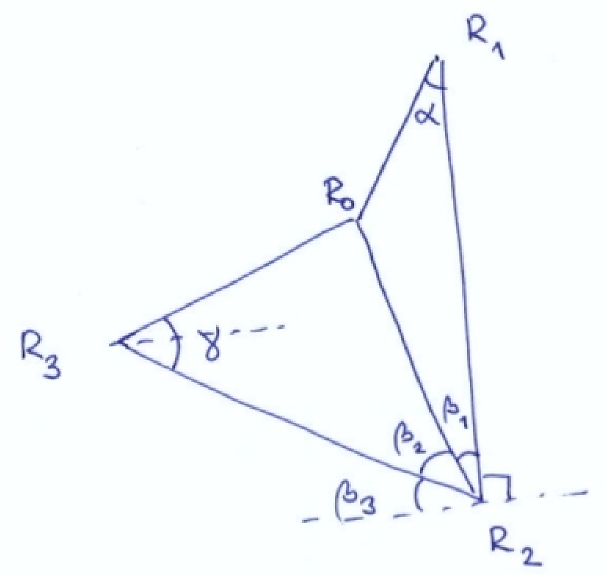
Vaihtoehto 1: Oletetaan lähtöpiste O origoksi ja olkoon x-akseli itään ja y-akseli pohjoiseen. Määritetään pisteiden koordinaatit:

$$\begin{aligned}
R_1 &= 600 \cdot (\cos(45^\circ), \quad \sin(45^\circ)) = 300 \cdot (\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}) \\
&\approx (424,3, \quad 424,3). \\
R_2 &= R_1 + (0, \quad -1600) \\
&\approx (424.3, \quad -1176,7) \\
R_3 &= R_2 + 1800 \cdot (-\cos 12^\circ, \quad \sin 12^\circ) \\
&\approx (424,3, \quad -1175,7) + (-1761,7, \quad 374,2) = (-1336,4, \quad -801,5).
\end{aligned}$$

(a) Toinen rasti on etäisyydellä

$$|R_2 - R_0| = |R_2| \approx \sqrt{424,3^2 + 1175,7^2} \approx 1249,9 \approx 1250.$$

(b) Kolmas rasti on suunnassa $\tan^{-1}(801,5/1336,4) \approx 31^\circ$ idästä pohjoiseen.



Vaihtoehto 2: (tyypillinen ratkaisu) Merkitään pisteitä kuten yllä: $R_0 = O, R_1, R_2, R_3$. Tarkastellaan kahta kolmiota OR_1R_2 ja OR_2R_3.

Käyttämällä kosinilausetta

$$\begin{aligned}
|R_2|^2 &= |R_1|^2 + |R_2 - R_1|^2 + 2 \cdot |R_1| \cdot |R_2 - R_1| \cdot \cos\alpha \\
&= 600^2 + 1600^2 + 2 \cdot 600 \cdot 1600 \cdot \cos 45^\circ \\
|R_2| &\approx 1250 \quad (a)
\end{aligned}$$

Pätee $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 90^\circ$, jossa $\beta_3 = 12^\circ$, β_1 saadaan sinilauseesta

$$\frac{\sin R_1}{|R_2|} = \frac{\sin\beta_1}{|R_1|}; \qquad \sin\beta_1 = \frac{|R_1|}{|R_2|}\sin R_1; \qquad \beta_1 \approx 19,84197^\circ.$$

joten $\beta_2 = 90^\circ - \beta_1 - \beta_3 \approx 58,158^\circ$.

Tarkastellaan toista kolmiota:

$$\begin{aligned}
|R_3|^2 &= |R_3 - R_2|^2 + |R_2|^2 + 2 \cdot |R_3 - R_2| \cdot |R_2| \cdot \cos\beta_2 \\
&= 1800^2 + 1250^2 + 2 \cdot 1800 \cdot 1250 \cdot \cos\beta_2 \\
|R_3| &\approx 1558,3206
\end{aligned}$$

$$\frac{\sin\beta_2}{|R_3|} = \frac{\sin\gamma}{|R_3 - R_2|}; \qquad \sin\gamma = \frac{|R_3 - R_2|}{|R_3|}\sin\beta_2; \qquad \gamma \approx 42,9528^\circ.$$

Suunta on $\gamma - 12^\circ \approx 31^\circ$ astetta idästä pohjoiseen (b).

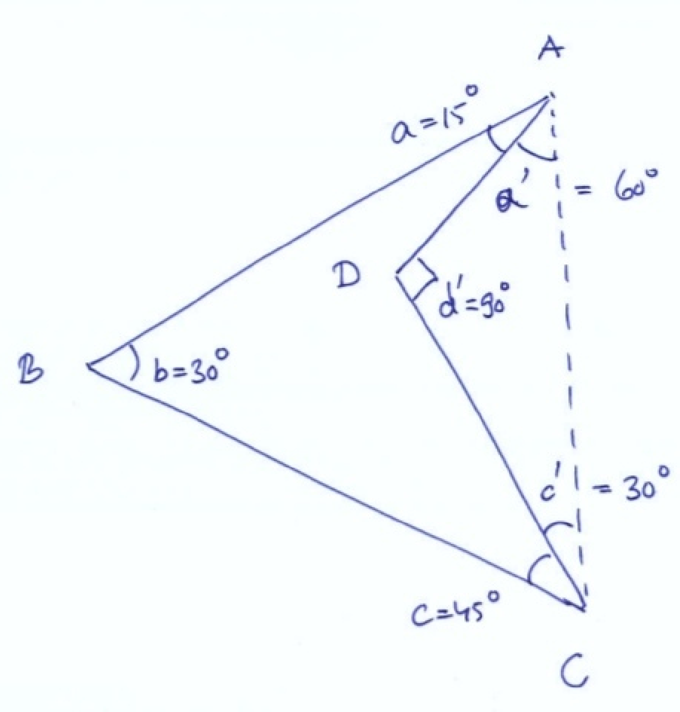
Tehtävä 2

Koska $|AB| = |BC|$ on ABC tasasivuinen kolmio. Tämän kolmion ABC kantakulmat ovat $\angle BAC = a + a' = \angle BCA = c + c' = \frac{1}{2}(180 - b) = 75°$ (kuvan merkinnöin).

Kolmion ADC kulmat $a' = 75 - a = 60°$ ja $c' = 75 - c = 30°$, joten kulma $d' = 180 - a' - b' = 90°$.

Kyseessä on suorakulmainen kolmio, joten $\frac{|AD|}{|AC|} = \cos a' = \frac{1}{2}$ eli $|AC| = 2$.

Vaihtoehtoisesti (keskimmäisessä kappaleessa) voidaan kolmiosta ADC todeta: Kulma $a' = 75 - a = 60°$. Nelikulmiosta $ABCD$ saadaan $\angle D = 360 - (a + b + c)$. Toisaalta d' on kulman $\angle D$ explementtikulma eli $d' = 360 - \angle D = 360 - (360 - (a + b + c)) = a + b + c = 90°$.



Nelikulmio $ABCD$ tehtävässä 2

Tehtävä 3

(a) Määrittelyalueella $x \neq 1, 2, 3$ ja

$$\frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{2(x-2)-(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$$

ristiinkertomalla

$$(x-1)(x-2) = (x-3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 3x = 9 - 6x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{3}$$

(b) Koska $2/3 = (3/2)^{-1}$, saamme

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-(2x-1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-4}.$$

Saman positiivisen kantaluvun potenssina $1 - 2x = 3x - 4$ eli $x = 1$.

Vaihtoehtoisesti: Ottamalla logaritmi puolittain:

$$\log\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \log\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x-1)(\log 2 - \log 3) = (3x-4)(\log 3 - \log 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2x = 3x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

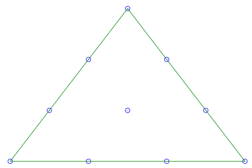
Vaihtoehtoisesti:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-4} \Leftrightarrow \frac{2^{2x-1}}{3^{2x-1}} = \frac{3^{3x-4}}{2^{3x-4}} \Leftrightarrow 2^{5x-5} = 3^{5x-5}$$

joten välttämättä $5x - 5 = 0$ eli $x = 1$.

Tehtävä 4

(a) Kun kolmion kärkiin sijoitetaan kuuset, kullekin sivulle lisäksi kaksi, ja kolmion keskelle yksi, kuusia on yhteensä 10.



(b) Oletetaan, että kuusia on kullakin sivulla $n-2$ kappaletta kärjet poislukien. Tällöin (kuvaan viitaten) kärjessä on yksi, seuraavalla rivillä kaksi, jne, alimmalla, n:nnellä rivillä n kappaletta. Yhteensä siis

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
N & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 & + & n & & \\
N & = & n & + & n-1 & + & \dots & + & 2 & + & 1 & & \\
\hline
2N & = & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & + & n+1 & = & n(n+1)
\end{array}$$

josta ratkaistaan n kokonaismäärän N funktiona[1]

$$n^2+n-2N=0 \quad \Leftrightarrow \quad n=\frac{-1+\sqrt{1+8N}}{2} =: f(N).$$

Välttämättä n on oltava kokonaisluku, mutta f on kaikilla positiiviluvuilla määritelty kasvava funktio[2]. Niinpä riitää tarkastella vuosisadan ääripäitä:

$$\underbrace{f(1900)}_{\approx 61{,}14} \le n \le \underbrace{f(1999)}_{\approx 62{,}73} \quad \Leftrightarrow \quad n=62$$

ja vuosi $N=\frac{n(n+1)}{2}=1953$.

Vaihtoehtoisesti tulokseen voi päästä systemaattisesti kokeilemalla n:n arvoja. Ratkaisuja voi apriori kuitenkin olla useita. Yksikäsitteisyyden toteamiseksi on ja todettava, että $n \mapsto N$ on kasvava funktion, ja huomioitava arvot

n	61	62	63
$N(n)$	1891	**1953**	2016

.

[1]Tämä on aritmeettinen summa $N=1+2+3+\cdots+n=\frac{n+n^2}{2}$

[2]Voidaan pitää selvänä, mutta myös koska $f'(N)=2/\sqrt{1+8N}>0$ kaikilla $N\ge 1$.

Tehtävä 5

(a) Sijoitetaan $x = -1$ ja $y = -1$

$$h = 9 + 6 - 4 - 36 + 8 = -17 < 0$$

joten piste on järvellä.

(b) Kulkureitillä $y = 4/3$ ja päätepisteissä (rannalla) $h = 0$:

$$h(x, 4/3) = 9x^2 + 6(4/3)^2 - 4(4/3)x + 36x - 8(4/3) = 9x^2 + \frac{92}{3}x = 0$$

josta $x = 0$ tai $x = -\frac{92}{27} \approx -3,407$. Pisteet ovat $(-\frac{92}{27}, \frac{4}{3})$ ja $(0, \frac{4}{3})$.

(c) Kulkureitin päissä (rannalla) on matalampaa, joten lossin kulkureitillä suurin syvyys saavutetaan, kun

$$0 = \frac{d}{dx}h(x, \frac{4}{3}) = \frac{d}{dx}\left(9x^2 + \frac{92}{3}x\right) = 18x + \frac{92}{3} \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{92}{54} = -\frac{46}{27} \approx -1.704.$$

$h(-\frac{46}{27}, \frac{4}{3}) \approx -26,123$. joten suurin syvyys on noin 26 m.

Tehtävä 6

Olkoon kuution sivun pituus d. Välttämättä poisleikattava pala on tetraedri, jonka kukin sivutahko on tasasivuinen kolmio.

Merkitään tetraedrin särmän pituutta x, jäljelle jää kuution alkuperäistä särmää tällöin $d - 2x$. Muodostuvat 14-tahokkaan särmät on tetraedrin pohjan sivuja, pituudeltaan $s := x\sqrt{2}$.

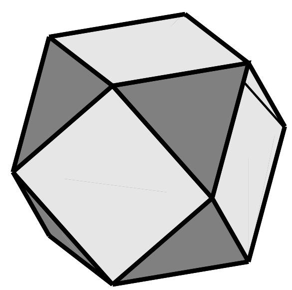
Yksi ratkaisu saadaan kun alkuperäistä kuution särmää ei jää jäljelle, $d - 2x = 0$, jolloin 14-tahokkaan sivut ovat tasasivuisia kolmioita (8kpl) ja neliöitä (6kpl):

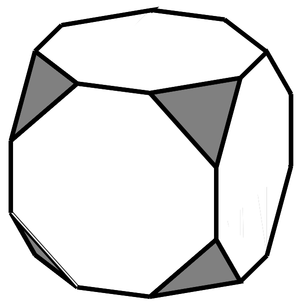
$$r := \frac{d}{s} = \frac{2x}{x\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Toinen ratkaisu saadaan, kun jäljelle jäävä kuution särmän osuus, $d - 2x$ on saman pituinen kun tetraedrin pohjan sivu, s. Tällöin 14-tahokkaan sivut ovat tasasivuisia kolmioita (8kpl) ja kahdeksankulmioita (6kpl):

$$d - 2x = s = x\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad d = (2 + \sqrt{2})x.$$

$$r := \frac{d}{s} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$





Arkkitehtivalinnan matematiikankokeen arvostelu

Yleisperiaatteet: Mikäli ratkaisussa on lasku- tai kopiointivirhe joka vaikuttaa ratkaisun loppuosaan, vaikuttaa se alentavasti koko loppuosankin arvosteluun. Erityisen vakavaksi virhe arvioidaan, jos se muuttaa tehtävän luonnetta.

Tehtävä 1

Kummastakin alakohdasta 3p.

Vaihtoehdossa 1: Pisteen R_1, R_2, R_3 koordinaatit, kukin +1p.

Vaihtoehdossa 2: Kulman β_2 ja pituuden R_3 määrittämien b-kohdassa: hyvitettään 1p kummastakin.

Tehtävä 2

Ratkaisun piirroksessa on nelikulmion kulman d oltava $d > 180°$ ja ratkaisussa on eksplisiittisesti viitattava tasakylkisyyteen, jotta ratkaisu oikeuttaisi täysiin pisteisiin.

Tällön esimerksi *kantakulma* $a + a' = c + c' = \frac{180-b}{2} = 75°$, *koska kolmio tasakylkinen* antaa 2p, kulmat a ja c' edellen kumpikin 1p. Loppulasku 2p

Tyypillisiä hyvityksiä, ovat kulma $d = 270°$ +1p, explementtikulma $d' = 90°$ +1p.

Pelkkä kuva ilman laskuja ei kuitenkaan anna pisteitä.

Tehtävä 3

Kummastakin alakohdasta 3p. Muoto, jossa x:lle on tuotettu lineaarinen yhtälö antaa 2p.

Tehtävä 4

Kohta (a) 2p, pelkkä kuva riittää, jos istutuspisteet ovat suorissa linjoissa.

Kohta (b) 4p. N muodostaa aritmeettisen summan (2p). Kokeiltaessa vastauksesta tulee selvitä, ettei 1900-luvulla ole kuin yksi mahdollinen N:n arvo (-1p).

Tehtävä 5

Osakokonaisuudet 2+2+2p. Täysiin pisteisiin ei hyväksytä minkäänlaisia laskuvirheitä. Virheet saattavat vähentään myös myöhempien kohtien ansioita; erityisesti isot laskuvirheet b-kohdan funktiossa vaikuttavat myös c-kohdan arvosteluun. Ääriarvon perusteluja c-kohdassa ei vaadita.

Tehtävä 6

Osatehtävien arvostelu 3p+3p. Kussakin kohdassa ratkaisun realistisilla mittasuhteilla piirretty kolmiuloitteisen tilanteen hahmottava skissi 1p, suhteen (lukuarvo) ratkaisu 2p. Vastauksessa suhteen on oltava puhdas luku (ei riipu sivunpituudesta). Mikäli suhde on oikean vastauksen käänteisluku vähennetään tehtävän kokonaispisteistä 1p.