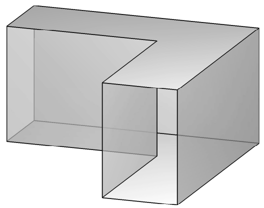
Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

Liite: Kaavakokoelma.

A1 Käytävässä on 90 asteen mutka oheisen piirroksen mukaisesti. Käytävän poikkileikkaus on suorakaide. Käytävän leveys on $d = 2,0\,\mathrm{m}$ ja korkeus $h = 3,0\,\mathrm{m}$. Kuinka pitkä tanko voidaan taivuttamatta kuljettaa käytävän läpi?



Tangon paksuutta ei oteta huomioon. Anna vastaus pyöristettynä täysiin senttimetreihin.

A2 Suorakulmaisen kolmion muotoisen tontin kahden lyhyemmän sivun pituudet ovat $a = 37\,\mathrm{m}$, $b = 41\,\mathrm{m}$. Mikä on rakentamiseen käytettävissä oleva maa-ala tontilla, kun koko tontin pisimmälle sivulle pitää jättää $3\,\mathrm{m}$ levyinen rakentamaton kaistale?

Anna maa-ala $0,1\ \mathrm{m}^2$ tarkkuuteen pyöristettynä.

A3 Arkkitehdit M. Uoto, F. Örm ja S. Hapé ovat suunnitelleet Aalto-yliopiston aulaan kullatusta teräskuutiosta muodostuvan taideteoksen. Kultaus on ohut.

Toteutuksen aikana teoksen sijoituspaikka muuttuu, jolloin teräskuution tilavuutta kasvatetaan 19% alkuperäisestä. Loppulaskutuksessa materiaalikustannusten todetaan kasvaneen samaiset 19% alkuperäisestä budjetista.

(a) Paljonko kultaukseen käytetyn kullan määrä kasvoi toteutuksen aikana?

(b) Teräksen yksikköhinta ei toteutuksen aikana muuttunut. Miten kullan yksikköhinta siis muuttui?

Anna vastaukset prosentteina $0,1$ prosenttiyksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

A4 Puolipallon muotoisen samppanjamaljan pohjalla lepää jäähdytetty teräskuula. Malja täytetään. Kuinka suuri osuus samppanjasta valuu pois maljasta, kun maljaa kallistetaan 45°? Maljan sisähalkaisija on D ja kuulan halkaisija $d = \frac{1}{2}D$.

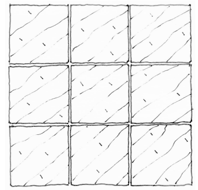
(R-säteisen pallosegmentin tilavuus on $V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$.)

Anna tarkka vastaus ja likiarvo kolmen desimaalin tarkkuuteen pyöristettynä.

A5 Suomen sodan muistojuhlaa varten kootaan seinälle yhdeksästä keramiikkalaatasta muodostuva mosaiikki (vrt kuva). Laatat ovat neliön muotoisia ja asetettu tasavälein. Kukin mosaiikin laatta valitaan satunnaisesti loputtomasta kasasta sinisiä ja keltaisia laattoja. Laatoista 60% on sinisiä.

(a) Millä todennäköisyydellä mosaiikki on kaksivärinen?

(b) Millä todennäköisyydellä mosaiikista tulee sellainen, että sen väritys ei muutu vaikka se koottaisiin seinälle laattojen sijoittelu alkuperäisestä 90 astetta myötäpäivään käännettynä?



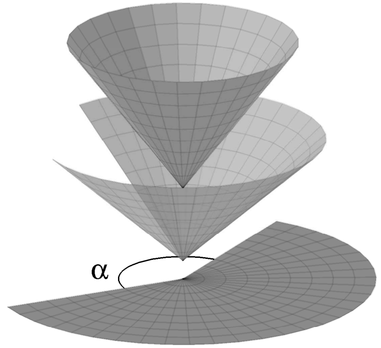
Anna todennäköisyydet kolmen desimaalin tarkkuuteen pyöristettynä.

A6 Ympyrän muotoisen kartonginpalan säde on r. Palasta leikataan pois ympyräsektori, jonka keskuskulma on α. Jäljelle jäänyt kartonginpala taivutetaan ympyräkartioksi siten, että leikkausreunat tulevat vastakkain.

(a) Mikä on ympyräkartion tilavuus, kun $\alpha = 90°$ ja $r = 10$ cm?

(b) Miten α on valittava, jotta ympyräkartion tilavuus on suurin mahdollinen?

Anna vastaukset $0,1$ kuutiosenttimetrin ja $0,1$ asteen tarkkuuteen pyöristettyinä.



Diplomingenjörs- och arkitektutbildningens gemensamma dia-antagning 2009

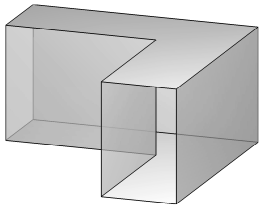
Arkitekturval, prov i matematik, 18.5.2009 Serie **A-SV**

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare.

Bilaga: Formelsamling.

A1 En korridor, med ett rektangulärt tvärsnitt, gör en 90 graders vinkel enligt vidstående ritning. Korridorens bredd är $d = 2{,}0\,\mathrm{m}$ och höjd $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$. En hur lång stång kan transporteras genom korridoren utan att stången böjs?



Stångens tjocklek kan negligeras. Ge svaret avrundat till hela centimetrar.

A2 De två kortaste sidorna av en tomt med formen av en rätvinklig triangel är $a = 37\,\mathrm{m}$, $b = 41\,\mathrm{m}$. Bestäm arean av det område som står till förfogande för byggande, då en 3 m bred rämsa längs den längsta sidan bör lämnas obebyggd.

Ge arean avrundad med $0{,}1$ m^2:s noggranhet.

A3 Arkitekterna M. Uoto, F. Örm, ja S. Hapé har för Aalto-universitets foajé planerat ett monument bestående av en förgylld stålkub. Förgyllingen är tunn.

Under förverkligandet ändras monumentets placering, varvid dess volym ökas med 19% från den ursprungliga. Vid slutfakturering konstateras materialkostnaderna ha ökat med samma 19% jämfört med den ursprungliga budgeten.

(a) Hur mycket ökade mängden guld som användes för förgyllningen under förverkligandet?

(b) Enhetspriset på stål ändrades inte under förverkligandet. Hur ändrades guldets enhetspris?

Ge svaren i procenter avrundade med $0{,}1$ procentenhets noggrannhet.

A4 På bottnet av en halvklotsformad champangeskål ligger en avkyld stålkula. Skålen fylls. Hur stor del av champangen rinner ut ur skålen, då skålen lutas 45°? Skålens inre diameter är D och kulans diameter är $d = \frac{1}{2}D$.

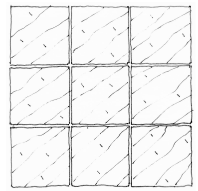
(Volymen av ett sfäriskt segment med radie R ges av $V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$.)

Ge exakt svar samt närmevärde med tre decimaler.

A5 För Finska krigets jubileum byggs på en vägg en mosaik bestående av nio kakelplattor. Plattorna är kvadratiska och placerade med jämna mellanrum (se bilden). Varje platta väljs slumpmässigt från en oändlig hög av blåa och gula kakelplattor. Av plattorna 60% är blåa.

(a) Med vilken sannolikhet är mosaiken tvåfärgad?

(b) Med vilken sannolikhet är mosaiken sådan, att färgmönstret inte ändras om mosaiken byggs upp med plattornas positioner vridna 90 grader medsols jämfört med de urspungliga positionerna?



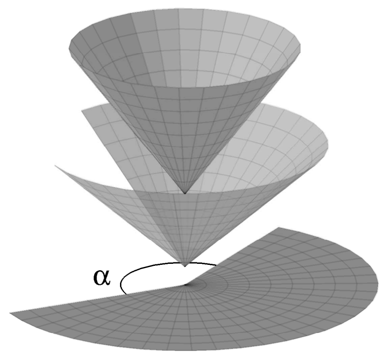
Ge sannolikheterna med tre decimalers noggrannhet.

A6 Radien av en cirkelformad kartongbit är r. Ur biten skärs en cirkelkon, vars centrivinkel är α. Den återstående biten böjs till en cirkelkon så, att snittytorna kommer mot varanda.

(a) Beräkna cirkelkonens volym, då $\alpha = 90°$ och $r = 10$ cm?

(b) Hur skall α väljas, om cirkelkonens volym skall maximeras?

Ge de respektive svaren avrundade till $0{,}1$ kubikcentimeters och $0{,}1$ graders noggrannhet.

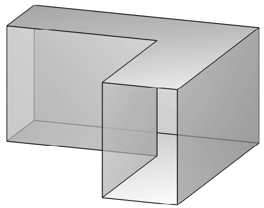


Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps.* Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted.

Allowed instruments: Writing instruments, non–programmable calculators, non–electronic general-language dictionaries to/from English.

Attachment: Table of formulae.

A1 A corridor makes a 90 degree turn as illustrated in the attached figure. The corridor's cross section is a rectangle. The width of the corridor is $d = 2,0\,\mathrm{m}$ and the height $h = 3,0\,\mathrm{m}$. How long a bar can be transported through the corridor without bending it?



The thickness of the bar can be neglected. Give the answer rounded to integral centimeters.

A2 Consider a piece of land having the form of a right-angled triangle, where the lenght of the two shorter edges are $a = 37\,\mathrm{m}$, $b = 41\,\mathrm{m}$. What is the land area free for constructing when one is required to leave a $3\,\mathrm{m}$ wide strip unexploited along the entire length of the longest edge.

Give the answer rounded to the accuracy of 0.1 m^2.

A3 Architects M. Uoto, F. Örm, and S. Hapé have designed a monument consisting of a gilded steel cube to be placed in the entré of Aalto-university. The gilding is thin.

During the execution of the project, the planned location for the monument is altered, whereby the volume of the steel cube is increased by 19% compared to the original size. In the final billing, the cost of the materials is also found to be 19% larger than that in the original budget.

(a) How much did the amount of gold needed for the gilding grow during the execution of the project?

(b) The unit price of the steel did not change during the execution of the project. Thus, how did the unit price of gold change?

Give the answers in percent rounded to the accuracy of 0.1 percentage points.

A4 On the bottom of a hemisphere formed champange bowl lies a cooled steel ball. The bowl is filled. What fraction of the champange is poured out of the bowl, as the bowl is tilted 45°? The inner diameter of the bowl is D and the diameter of the ball $d = \frac{1}{2}D$.

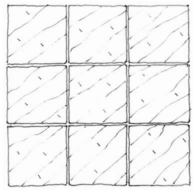
(The volume of a segment of a sphere of radius R is given by $V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$.)

Give the exact answer and its approximation rounded to the accuracy of three decimal places.

A5 To commemorate the Finnish War (Swedish-Russian war 1809) one arranges a mosaic placed on a wall. The mosaic is made of nine square ceramic tiles, which are placed at even intervals in the mosaic. Each tile is chosen randomly from an infinite pile of blue and yellow tiles. Of the tiles, 60% are blue.

(a) What is the probability that the mosaic is bicoloured?

(b) What is the probability that the color pattern of the mosaic is not altered, if its tiles are rearranged at positions rotated 90 degrees clockwise compared to the original ones?



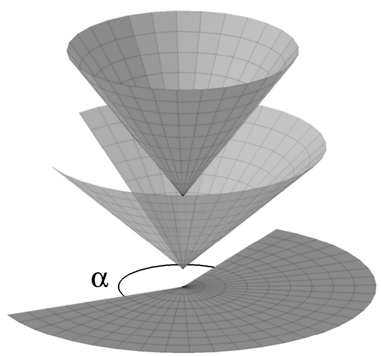
Give the probabilities rounded to the accuracy of three decimal places.

A6 A piece of cardboard has the form of disc of radius r. From the piece one cuts away a sector with a central angle α. The remaining piece of cardboard is bent to form a circular cone such that the cut edges are placed edge-to-edge.

(a) Find the volume of the circular cone, when $\alpha = 90°$ and $r = 10$ cm?

(b) How should one choose α in order to maximize the volume of the circular cone?

Give the answers rounded to the accuracy of 0,1 cubic centimeters and 0,1 degrees respectively.



Arvostelusta

Näissä arkkitehtimatematiikan kokeen tehtävien ratkaisuissa on pyritty esittämään muutamia ratkaisutapoja, oikeita ratkaisutapoja on tyypillisesti useita.

Tehtävien malliratkaisujen ohella on annettu tietoja arvosteluperiaatteista. Arvosteluperiaatteet ovat suuntaa antavia ja arvostelijan tehtävänä on soveltaa niitä hakijan ratkaisuun. Hakijan ratkaisu saattaa erota malliratkaisusta huomattavastikin, ja arvostelu perustuu aina hakijan koko ratkaisuun.

Jotta ratkaisu oikeuttaisi täysiin pisteisiin on vastauksen lähtökohtaisesti oltava annettu vaaditussa muodossa.

Tehtävä 1

Koska käytävä on symmetrinen, voimme oletamme, että ahtaimmassa kohdassa tanko on pohjan suhteen symmetrisesti 45° kulmassa, diagonaalisesti lattiasta kattoon. Tangon vapaa pituus x saadaan tällöin

$$x^2 = (2d)^2 + (2d)^2 + h^2 = 8d^2 + h^2$$

eli

$$x = \sqrt{8d^2 + h^2} = \sqrt{41} = 6,403124\ldots.$$

Tangon pituus $h \leq 640\,\mathrm{cm}$.

Arvostelu

Arvostelussa optimaalisesti sijoittelusta (ilman perusteluja) saa 2p, pituuden laskemisesta 4p.

Vaillinaisissa ratkaisuissa diagonaalisesti alasisäkulmasta yläulkokulmaan (tai vastaava lokaali optimi), annetaan tehtävästä max 2p. Mikäli ehdotettu ratkaisu ei ole edes lokaali optimi, ratkaisu on arvoton.

Tehtävässä on oleellista kolmiuloitteinen hahmottaminen. Siksi erityisesti mikäli optimaaliseksi sijoitukseksi ehdotetaan jossakin koordinaattitasossa olevaa ratkaisua, tehtävästä ei saa pisteitä.

—

Tehtävä 2

Merkitään sivun $b = 37$ m lyhenemää $\triangle b$ ja vastaavasti $a = 41$ m ja $\triangle a$. Olkoon

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3050} = 55,22680\ldots$$

pisin sivu, ja leikatun alueen leveys $d = 3$ m. Tällöin yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella $\frac{\triangle b}{d} = \frac{c}{a}$ ja vastaavasti $\frac{\triangle a}{d} = \frac{c}{b}$, josta saamme rakennusalaksi

$$A = \frac{1}{2}(a - \triangle a)(b - \triangle b) = \left(1 - \frac{cd}{ab}\right)^2 \frac{1}{2}ab = 601,8670\ldots$$

Rakennusala voi olla korkeintaan $601,9\,\mathrm{m}^2$.

Vaihtoehtoisesti tehtävän voi ratkaista myös tarkastelemalla suhteellista alan muutosta; syntyvät kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Tontin ala on $A = \frac{1}{2}ab$. Samanmuotoisten kolmioiden alojen perusteella pätee alan pienennyksen $\triangle A$ ja tontin alan A suhteelle

$$\frac{\triangle A}{A} = \left(\frac{\triangle a}{a}\right)^2$$

Suhde voidaan laskea vastaavalla tavalla monella eri tavalla.

Arvostelu

Tehtävässä oleellista on huomata, että syntyvät kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Tehtävässä pitää laskea ratkaisutavan vaatimat uuden kolmion mittasuuret (4p), jonka avulla uusi pinta-ala ilmaistaan näiden avulla (2p).

Tehtävän alkuosassa voidaan - muiden ansioiden puuttuessa - hyvittää piste kustakin: c:n; α (sivua a vastaava kulma) ja β laskemisesta.

Mikäli ratkaisussa on oletettu, että $\triangle a = \triangle b$, arvostellaan vastaus korkeintaan 3p arvoiseksi.

Mikäli ratkaisussa on oletettu, että syntyvät kolmiot ovat tasasivuisia, on ratkaisu lähtökohtaisesti arvoton.

—

$\triangle a = 4,0410\ldots$
$\triangle b = 4,4778\ldots$
$a - \triangle a = 32,9590\ldots$
$b - \triangle b = 36,53222\ldots$
$\alpha = 0,73416\cdots = 42,064\ldots°$
$\beta = 0,83664\cdots = 47,936\ldots°$

Tehtävä 3

Merkitään $p = 19\%$ ja $q = 1 + \frac{p}{100\%} = 1,19$. a) Olkoon A_0 ja A_1 kuution pinta-ala alussa ja muutoksen jälkeen. Vastaavasti tilavuudelle V_0, V_1 ja sivunpituudelle d_0, d_1.

$$q = \frac{V_1}{V_0} = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^3, \quad \frac{A_1}{A_0} = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{2/3} = q^{2/3} = 1,122960$$

Nousu siis $12,3\%$.

b) Olkoon C_i, a_i, b_i kokonaiskustannus, kullan- ja teräksen yksikköhinnat. $C_i = a_iA_i + b_iV_i = a_id_i^2 + b_id_i^3$. Tiedetään, että $C_1 = qC_0$, $d_1 = q^{1/3}d_0$, ja $b_0 = b_1$.

$$\begin{aligned} qC_0 = q(a_0d_0^2 + b_0d_0^3) &= C_1 = a_1d_0^2q^{2/3} + b_1d_0^3q \\ \Leftrightarrow a_0d_0^2q + b_0d_0^3q &= a_1d_0^2q^{2/3} + b_0d_0^3q \\ \Leftrightarrow a_1/a_0 &= q^{1/3} = 1,0596985\ldots \end{aligned}$$

Nousu siis $6,0\%$.

Vaihtoehtoisesti (b)-kohdassa suoraan päättelemällä: Koska kokonaiskustannukset nousivat samassa suhteessa, kuin käytetyn teräksen kustannukset, täytyy kultauksen kustannustenkin kasvaa $p\%$. Niinpä $a_0A_0q = a_1A_1 = a_0A_0q^{2/3}$, josta tulos $a_1/a_0 = q^{1/3}$.

Arvostelu

Tehtävän pisteytys (a) 3p ja (b) 3p.

Hyvityksenä ratkaisusta 1p, jos (a):ssa lasketaan toteutetun kuution sivunpituus, tai suhdeluku $p^{1/3}$, jos siinä ei ole muita ansioita.

—

Tehtävä 4

Pallon kalotin tilavuus on annettu, kun $0 \leq h \leq 2R$, jossa R on kyseisen pallon säde ja h kalotin korkeus kalotin laelta pallon säteen suuntaan mitaten. Merkitään kallistuskulmaa α ja maljaan jäävän veden korkeutta h.

$$\frac{D/2 - h}{D/2} = \sin\alpha \qquad \text{eli} \qquad h = \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha)D.$$

Koska teräspallon laki jää aina veden pinnalle, voidaan kallistuskulmaa vastaava veden tilavuus laskea vähentämällä vesikalotista vastaava teräskalotti:

$$V(\alpha) = V_{H_2O} - V_{Fe} = \pi(\frac{1}{2}D - \frac{1}{3}h)h^2 - \pi(\frac{1}{4}D - \frac{1}{3}h)h^2 = \pi\frac{1}{4}Dh^2 = \frac{\pi}{16}D^3(1 - \sin\alpha)^2.$$

Vettä valuu siis pois osuus

$$\frac{V(0) - V(\alpha^*)}{V(0)} = \frac{1 - (1 - \sin\alpha)^2}{1} = (2 - \sin\alpha^*)\sin\alpha^* = 0,9142135\ldots$$

missä, kun $\alpha^* = 45°$. Shampanjaa valuu siis pois $0,914$ osuus.

Arvostelu

$h(\alpha^*)$ laskeminen antaa 2p, yleisen lausekkeen $V(\alpha)$ laskeminen 2p. Suhteen ilmaiseminen näitä käyttäen ja siventäminen 2p.

$V(0)$ laskemisesta voidaan hyvittää sellaisenaan 1p, jos se lasketaan erikseen esimerkiksi käyttäen pallon tilavuuden lauseketta $\frac{3}{4}\pi r^3$.

—

$h(\alpha^*) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}D \approx 0,1$
$V(0) = \frac{\pi}{12}D^3 - \frac{\pi}{48}D^3 \approx (0,261799 - 0.065450)D^3 \approx 0.19635D^3$
$V(\alpha^*) = V(0)\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx (0,0224588 - 0,0056147)D^3 \approx 0,0280735D^3$

Tehtävä 5

Merkitään sinisen laatan valinnan todennäköisyyttä $a = 0.60$.

a) Mosaiikki on kauttaaltaan sininen todennäköisyydellä a^9 ja keltainen tn $(1-a)^9$, joten mosaiikki on kaksivärinen komplementtitodennäköisyydellä

$$p = 1 - [a^9 + (1-a)^9] = 0.989660 \dots \approx 0.990.$$

b) Merkitään mosaiikin vaakarivin i ja pystyrivin j laatan väriä C_{ij}. Mosaiikki ei muutu kääntämällä, jos pätee:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = C_{13}, & C_{12} = C_{23}, & C_{13} = C_{33}, \\ C_{21} = C_{12}, & C_{22} = C_{22}, & C_{23} = C_{32}, \\ C_{31} = C_{11}, & C_{32} = C_{21}, & C_{33} = C_{31}, \end{array}$$

josta saadaan kolme laattaryhmää. Kussakin ryhmässä on sama väri, mutta kunkin ryhmän väri on vapaasti ja riippumattomasti valittavissa:

$$C_{11} = C_{13} = C_{33} = C_{31}, \qquad C_{12} = C_{23} = C_{32} = C_{21}, \qquad C_{22}.$$

eli todennäköisyys

$$q = [a^4 + (1-a)^4]\,[a^4 + (1-a)^4]\,[a + (1-a)] = [a^4 + (1-a)^4]^2 = 0.02408704 \approx 0,024.$$

Edelläkuvatut värivaihtoehdot voidaan ryhmien sijaan esittää luettelona (sininen tumma):

$$\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \square \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \square & \blacksquare \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \square & \square & \square \\ \blacksquare & \square & \blacksquare \end{array}$$

jolloin kokonaistodennäköisyys q on summa tapauksia vastaavista todennäköisyyksistä:

$$\begin{array}{cccc} (1-a)^9 & a(1-a)^8 & a^5(1-a)^4 & a^5(1-a)^4 \\ a^9 & a^8(1-a) & a^4(1-a)^5 & a^4(1-a)^5 \end{array}$$

Vaihtoehtoisesti perusteluna b-kohdan ryhmille voidaan todeta, että jos mosaiikki ei muutu 90° käännettäessä, ei se muutu käännettäessä useampaankaan kertaan. Tästä saadaan suoraan edellä olevat ryhmät.

Arvostelu

Arvostelu (a) 3p, (b) 3p.

(a) Jos vastaus ei ole täysin oikein, max 2p.

(b) Jos vastaus ei ole täysin oikein, max 2p. Mikäli ratkaisussa luetellaan mahdolliset värivaihtoehdot, ratkaisu arvostellaan lähtökohtaisesti 1p arvoiseksi.

—

$1 - p = 0.01034$

Tehtävä 6

Merkitään ympyräkartion korkeutta h, pohjan reunan pituutta L, pohjan sädettä s, pohjan alaa A. Olkoon jäljelle jäävään palan keskuskulma $\beta = 2\pi - \alpha$, $0 \le \beta \le 2\pi$. Saamme

$$L = \frac{\beta}{2\pi} 2\pi r = \beta r, \quad \frac{s}{r} = \frac{\beta}{2\pi}.$$

Korkeudelle pätee

$$h^2 + s^2 = r^2, \quad h = \sqrt{r^2 - s^2}. \tag{1}$$

Tilavuus on siis

$$V = \frac{1}{3} A h = \frac{1}{3}\,\pi s^2\, h$$

Kohdassa (a) on $s = \frac{\beta}{2\pi} r = \frac{15}{2}$, ja $h = \sqrt{\frac{175}{4}} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \approx 6,6144$ jolloin

$$V = \frac{375}{8}\pi\sqrt{7} = 389,619041 \dots \approx 389,6.$$

Kohdassa (b) merkitään laskujen helpottamiseksi $x = [s/r]^2 = \left[\frac{\beta}{2\pi}\right]^2 \in [0,1]$, koska tilavuuden lauseke (1) on $V = \frac{\pi}{3}\, s^2 \sqrt{r^2 - s^2}$ jolloin saadaan edelleen

$$V(x) = \frac{\pi r^3}{3} x\sqrt{1-x}.$$

Välin päissä tilavuus on nolla, $V(0) = V(1) = 0$, (eli kun $\beta = 0$ tai $\beta = 2\pi$). Niinpä suurin tilavuus saavutetaan derivaatan nollakohdassa.

$$\frac{d}{dx} V(x) = \frac{\pi r^3}{3}\left(\sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi r^3}{6}\,\frac{(2-3x)}{\sqrt{1-x}} = 0.$$

Merkitään ratkaisua $x = x^* = \frac{2}{3}$ jolloin $\beta = 2\pi\sqrt{x} = 5,13019932\dots$ ja

$$\alpha = 1,15298598\dots \text{rad} \approx 66,061230° \approx 66,1°.$$

(tällöin $V = 403,0665253\dots$).

Arvostelu

Ratkaisun osat (a) 3p, (b) 3p

(a) Alussa joko $s = \frac{15}{2}$ tai $h = \frac{5\sqrt{7}}{2}$ laskeminen antaa 1p. Yleisestä kartion tilavuuden lausekkeesta $\frac{1}{3}Ah$ ei hyvitetä.

Mikäli lasketaan komplementtikulmaa vastaava kartio, osasta saa max 2p.

(b) V lauseke yhden muuttujan avulla antaa 1p.

—