RATKAISUT, Arkkitehtimatematiikan koe 23.5.2016

1. SARJA A

   a) Ratkaise yhtälö
$$\frac{3x+2}{2} + \frac{2-x}{3} = 4.$$
(3 p.)

   b) Lukujen 0, 3, 7 ja a keskiarvo on 2. Määritä a.
(3 p.)

Ratkaisu A:

(a) Kerrotaan yhtälö puolittain 6:lla:
$$3(3x+2) + 2(2-x) = 6 \cdot 4.$$

Nyt
$$\begin{aligned} 3(3x+2) + 2(2-x) &= 6 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ 9x + 6 + 4 - 2x &= 24 \\ \Leftrightarrow\ 7x &= 24 - 6 - 4 = 14 \\ \Leftrightarrow\ x &= 2. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \frac{0+3+7+a}{4} &= 2 \\ \Leftrightarrow\ 10 + a &= 2 \cdot 4 = 8 \\ \Leftrightarrow\ a &= 8 - 10 = -2. \end{aligned}$$

1. SARJA B

   a) Ratkaise yhtälö
$$\frac{4x+3}{3} + \frac{3-x}{4} = 5.$$
(3 p.)

   b) Lukujen 0, 6, 7 ja a keskiarvo on 3. Määritä a.
(3 p.)

Ratkaisu B:

(a) Kerrotaan yhtälö puolittain 12:lla:
$$4(4x+3) + 3(3-x) = 5 \cdot 12.$$

Nyt
$$\begin{aligned} 4(4x+3) + 3(3-x) &= 5 \cdot 12 \\ \Leftrightarrow\ 16x + 12 + 9 - 3x &= 60 \\ \Leftrightarrow\ 13x &= 60 - 12 - 9 = 39 \\ \Leftrightarrow\ x &= 39/13 = 3. \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{0+6+7+a}{4} = 3$$
$$\Leftrightarrow\ 13+a = 3\cdot 4 = 12$$
$$\Leftrightarrow\ a = 12-13 = -1.$$

1. SARJA C

   a) Ratkaise yhtälö
   $$\frac{3x+4}{4} + \frac{4-x}{3} = 4.$$
   (3 p.)

   b) Lukujen 0, 6, 7 ja a keskiarvo on 2. Määritä a.
   (3 p.)

Ratkaisu C:

(a) Kerrotaan yhtälö puolittain 12:lla:

$$3(3x+4) + 4(4-x) = 4\cdot 12.$$

Nyt

$$3(3x+4)+4(4-x) = 4\cdot 12$$
$$\Leftrightarrow\ 9x+12+16-4x = 48$$
$$\Leftrightarrow\ 5x = 48-12-16 = 20$$
$$\Leftrightarrow\ x = 20/5 = 4.$$

(b)

$$\frac{0+6+7+a}{4} = 2$$
$$\Leftrightarrow\ 13+a = 2\cdot 4 = 8$$
$$\Leftrightarrow\ a = 8-13 = -5.$$

1. SARJA D

   a) Ratkaise yhtälö
   $$\frac{2x+5}{5} + \frac{5-x}{2} = 3.$$
   (3 p.)

   b) Lukujen 0, 5, 9 ja a keskiarvo on 3. Määritä a.
   (3 p.)

Ratkaisu D:

(a) Kerrotaan yhtälö puolittain 10:lla:

$$2(2x+5) + 5(5-x) = 3\cdot 10.$$

Nyt

$$2(2x+5)+5(5-x) = 3\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow \; 4x + 10 + 25 - 5x = 30$$
$$\Leftrightarrow \; -x = 30 - 10 - 25 = -5$$
$$\Leftrightarrow \; x = 5.$$

(b)

$$\frac{0+5+9+a}{4} = 3$$
$$\Leftrightarrow \; 14 + a = 3 \cdot 4 = 12$$
$$\Leftrightarrow \; a = 12 - 14 = -2.$$

2. Viisi palikkaa pinotaan torniksi. Palikoista kaksi on punaisia ja kolme valkoisia. Muuten palikat ovat samanlaisia.

   a) Kuinka monta erilaista viiden palikan korkuista tornia palikoista voi tehdä? (3 p.)

   b) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti kootussa tornissa punaiset palikat ovat vierekkäin? (3 p.)

   Ratkaisu:

   (a) Punaisten palikoiden paikat voidaan valita $\binom{5}{2} = 10$ tavalla. Siis erilaisia torneja on 10.

   (b) Punaparin alapuolella voi olla $0, 1, 2$ tai 3 palikkaa, joten parilla on tornissa 4 paikkaa. Kysytty todennäköisyys on $\frac{4}{10} = 0{,}4$.

3. Arkkitehtiopiskelija näki matkallaan Dubaissa maailman korkeimman rakennuksen Burj Khalifan (828 m). Työstä inspiroituneena hän suunnitteli harjoitustyönä suoran ympyrälieriön muotoisen tornitalon, jonka pohjan pinta-ala on 4000 m^2 ja seinien korkeus 829 metriä. Hän päättää rakentaa suunnittelemastaan tornista pienoismallin mitta-kaavassa 1:245.

   a) Mahtuuko pienoismallin pohja neliön muotoiselle levylle, jonka sivun pituus on 30 cm? (3 p.)

   b) Kuinka suuri on pienoismallin ulkoseinän pinta-ala? Anna vastaus neliömetreinä kolmen desimaalin tarkkuudella. (3 p.)

   Ratkaisu:

   (a) Koska lattian ala $A = \pi r^2$, rakennuksen lattian säde

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4000\ \mathrm{m}^2}{\pi}} \; (\approx 35{,}7\ \mathrm{m}).$$

   Olkoon pienoismallin pohjan säde r_m. Yhdenmuotoisten kappaleiden vastinosien suhde on yhtä suuri kuin mittakaava, joten yhtälöstä

$$r_m / r = 1/245$$

   saadaan

$$r_m = \frac{\sqrt{\frac{4000\ \mathrm{m}^2}{\pi}}}{245} \approx 14{,}6\ \mathrm{cm}$$

   Pienoismalli mahtuu levyn päälle, sillä $2r_m$ cm < 30 cm.

   (b) Vastaavasti kuten edellä pienoismallin korkeus $h_m = \frac{829}{245}$ m. Pienoismallin seinien pinta-ala

$$A_m = (2\pi \cdot r_m) \cdot h_m = 2\pi \sqrt{\frac{4000\ \mathrm{m}^2}{\pi}} \cdot \frac{829\ \mathrm{m}}{245^2} \approx 3{,}096\ \mathrm{m}^2.$$

4. Puolipallon sisällä on kuutio, jonka yksi sivutaso on puolipallon pohjalla ja vastakkaisessa sivutasossa olevat kulmat ovat sen pinnalla. Puolipallon säde $r = 7$.

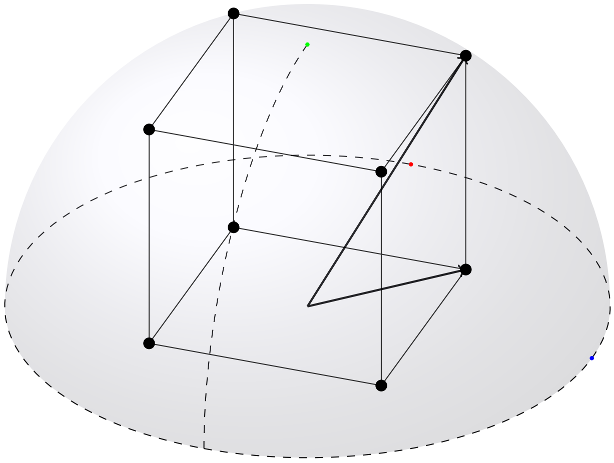
   a) Piirrä kuva. (1 p.)

   b) Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta? Anna vastaus prosentin tarkkuudella. (5 p.)

   Vihje: Kun pallon säde on r, niin sen tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

   Ratkaisu:

   (a)



   (b) Olkoon kuution sivun pituus $x \geq 0$. Pythagoraan lauseen nojalla kuution sivutahkon halkaisija on $x\sqrt{2}$. Kun puolipallon säde on r, niin Pythagoraan lauseen nojalla $x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = r^2$. Nyt, koska $x, r \geq 0$,

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 = r^2 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

   Kuution tilavuus on

$$V_1 = \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3$$

   ja puolipallon tilavuus

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2\pi}{3} \cdot r^3.$$

   Tilavuuksien suhde

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 \cdot \frac{3}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot 2^{1/2} \cdot 3^{-1/2} \approx 0{,}26.$$

   Kuution tilavuus on 26 % puolipallon tilavuudesta.

   (SARJA A: $r = 7$. SARJA B: $r = 5$. SARJA C: $r = 3$. SARJA D: $r = 11$. Tulos ei riipu säteestä.)

5. Tasasivuisen kolmion pinta-ala on sama kuin sen piirin pituus. Mikä on kolmion pinta-ala? Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. (6 p.)

   Ratkaisu:

Merkitään tasasivuisen kolmion sivun pituutta kirjaimella t ja korkeutta kirjaimella h. Nyt Pythagoraan lauseen nojalla $h = \sqrt{t^2 - \frac{t^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}t}{2}$. Kolmion piiri on $3t$ ja pinta-ala on $\frac{1}{2}th$. Tästä saadaan, että

$$3t = \frac{1}{2}th = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}t^2}{2}$$

ja edelleen $t = \frac{12}{\sqrt{3}}$. Nyt $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{\sqrt{3}} = 6$. Kysytty pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot 6 = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$. Kaksidesimaalinen likiarvo on 20,78.

6. Pertsa ja Jelena ovat eräällä kurssilla ja juttelevat luentosalissa: ”Näyttäisi siltä, että 12/17 kurssitovereistani käyttää silmälaseja”, toteaa Pertsa. ”Hassua, minun mielestäni 5/7 kurssitovereistani on silmälasipäisiä”, laskee Jelena. Molemmat ovat oikeassa.

   a) Onko Pertsalla silmälasit? Entäpä Jelenalla? (2 p.)

   b) Kuinka monta oppilasta kurssilla on? (4 p.)

Ratkaisu:

(a) Olkoon n Pertsan/Jelenan kurssitoverien lukumäärä. (Kaikkien kurssilaisten lukumäärä on siis $n+1$.) Nyt Pertsan kurssitovereista $\frac{12}{17}n$ on silmälasipäisiä. Jelenan kurssitovereista $\frac{5}{7}n$ on silmälasipäisiä. Koska

$$\frac{12}{17} \approx 0{,}706 < 0{,}714 \approx \frac{5}{7},$$

Pertsalla täytyy olla silmälasit ja Jelenalla ei.

(b) Edellisen kohdan nojalla silmälasipäisten määrä kurssilla on $\frac{12}{17}n + 1 = \frac{5}{7}n$. Ratkaistaan n.

$$\left(\frac{5}{7} - \frac{12}{17}\right)n = 1 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 17 - 7 \cdot 12}{7 \cdot 17}n = 1 \Leftrightarrow n = 119.$$

Kurssilla on 120 osallistujaa.