RATKAISUT, Insinöörimatematiikan koe 31.5.2016

1. Kahdessa astiassa on bensiinin ja etanolin seosta. Ensimmäisessä astiassa on 10 litraa seosta, jonka tilavuudesta 5 % on etanolia. Toisessa astiassa on 20 litraa seosta, jonka tilavuudesta 10 % on etanolia.

   a) Molempien astioiden sisältö kaadetaan yhteen astiaan ja sekoitetaan. Mikä on uuden seoksen etanolipitoisuus?

   (2 p.)

   b) Kuinka paljon a-kohdan seokseen pitää lisätä puhdasta etanolia, jotta saadaan 50 % etanolia sisältävä seos?

   (2 p.)

   c) a-kohdan seoksen litrahinta on 1,50 euroa. Puolet etananolia ja puolet bensiiniä sisältävän seoksen litrahinta on 1,00 euroa. Mitkä ovat tällöin puhtaan bensiinin ja etanolin litrahinnat?

   (2 p.)

Ratkaisu:

(a) Etanolipitoisuus $= \frac{etanoli}{koko\ seos} = \frac{10\cdot 0{,}05+20\cdot 0{,}1}{10+20} = \frac{2{,}5}{30} \approx 8{,}3\%$.

(b) Haluttu etanolipitoisuus etanolin lisäämisen (x litraa) jälkeen on

$$0{,}5 = \frac{2{,}5+x}{30+x}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä x:

$$0{,}5 = \frac{2{,}5+x}{30+x} \;\Leftrightarrow\; 15+0{,}5x = 2{,}5+x \;\Leftrightarrow\; -0{,}5x = -12{,}5 \;\Leftrightarrow\; x = 25.$$

Etanolia on lisättävä 25 litraa.

(c) Olkoon a etanolin litrahinta ja olkoon b bensiinin litrahinta. Nyt a-kohdan seoksen hinta on

$$2{,}5a + (30-2{,}5)b = 1{,}50\cdot 30 = 45.$$

Vastaavasti b-kohdan hinta on

$$27{,}5a + 27{,}5b = 1{,}00\cdot 55 = 55.$$

Vähentämällä yhtälöt puolittain, saadaan

$$2{,}5a + (30-2{,}5)b - (27{,}5a + 27{,}5b) = 45 - 55.$$

Tästä edelleen

$$-25a = -10 \;\Leftrightarrow\; a = 0{,}4.$$

Ratkaistaan b yhtölöstä $27{,}5a + 27{,}5b = 55$:

$$b = (55-27{,}5a)/27,5 = (55-27{,}5\cdot 0{,}4)/27{,}5 = 1{,}6.$$

Etanolin litrahinta on 0,4 euroa ja bensiinin litrahinta on 1,6 euroa.

2. a) Ratkaise yhtälö

$$2x + \sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 2.$$

(3 p.)

b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön

$$-1 \leq \frac{x+1}{x+2} \leq 2\ ?$$

(3 p.)

Ratkaisu:

(a) Kirjoitetaan yhtälö muotoon $\sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 2 - 2x$ ja neliöidään se. Saadaan

$$4x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 8x + 4.$$

Vähentämällä puolittain $4x^2 - 8x + 1$ saadaan $6x = 3$, joten $x = 1/2$. Sijoittamalla todetaan, että ratkaisu on oikea.

(b) Tarkastellaan ensin epäyhtälön vasenta puolta

$$-1 \leq \frac{x+1}{x+2}.$$

Esitetään se muodossa

$$0 \leq 1 + \frac{x+1}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2}.$$

Nimittäjän ja osoittajan merkit vaihtuvat oheisen taulukon mukaan:

		-2		$-3/2$	
$2x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x+3}{x+2}$	$+$	ei määr.	$-$	0	$+$

Taulukosta nähdään, että $x < -2$ tai $x \geq -3/2$.

Tarkastellaan sitten epäyhtälön oikeaa puolta

$$\frac{x+1}{x+2} \leq 2.$$

Esitetään se muodossa

$$0 \leq 2 - \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+2}.$$

Nimittäjän ja osoittajan merkit vaihtuvat oheisen taulukon mukaan:

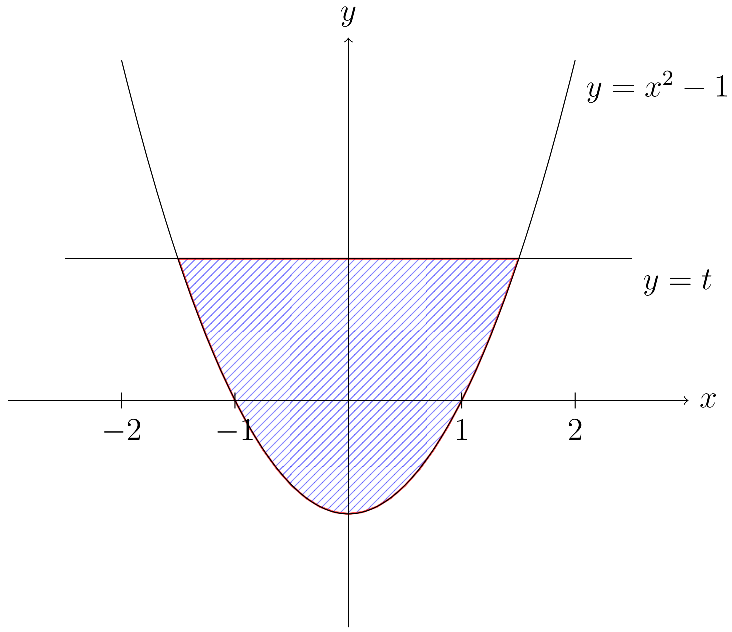
		-3		-2	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x+2}$	$+$	0	$-$	ei määr.	$+$

Taulukosta nähdään, että $x \leq -3$ tai $x > -2$.

Molemmat epäyhtälöt ovat voimassa, kun $x \leq -3$ tai $x \geq -3/2$.

3. Olkoon $t > 0$ vakio. Laske paraabelin $y = x^2 - 1$ ja suoran $y = t$ rajoittaman alueen pinta-ala. Piirrä kuva. (6 p.)

Ratkaisu:

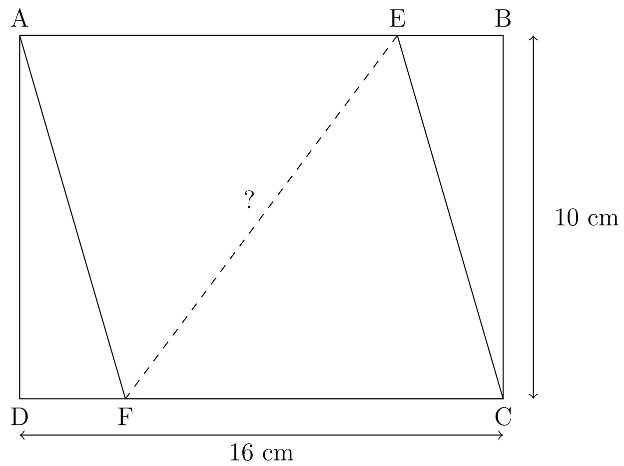


Kuva 1: Kuvaaja

Integroimisrajat saadaan yhtälöstä $x^2 - 1 = t$. Ne ovat $\pm\sqrt{t+1}$. Nyt

$$A = \int_{-\sqrt{t+1}}^{\sqrt{t+1}} \Big(t - x^2 + 1\Big) \mathrm{d}x = \Big|_{-\sqrt{t+1}}^{\sqrt{t+1}} \Big(tx - \frac{x^3}{3} + x\Big) = \frac{4}{3}(1+t)\sqrt{1+t}.$$

4. Suorakulmiossa ABCD sivun AB pituus on 16 cm ja sivun AD pituus on 10 cm. Valitaan piste E sivulta AB ja piste F sivulta CD siten, että AECF on neljäkäs (suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä). Katso kuva. Laske janan EF pituus. Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. (6 p.)



Ratkaisu:

Merkitään janan AB pituutta kirjaimella a, janan AD pituutta kirjaimella b, janan EB pituutta kirjaimella x ja janan EF pituutta kirjaimella z. (Huomaa, että janan AB pituus on myös janan DC pituus, janan AD pituus on myös janan BC pituus, janan EB pituus on myös janan DF pituus ja janan AE pituus on myös neljäkkään sivujen AF, EC ja FC pituus.) Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 + b^2 = (a - x)^2.$$

Ratkaistaan yhtälöstä x. Saadaan $2ax = a^2 - b^2$, josta edelleen $x = (a^2 - b^2)/2a$.

Otetaan käyttöön koordinaatisto, jonka origo on pisteessä D, x-akseli on janan DC suuntainen ja y-akseli janan AD suuntainen. Nyt F on koordinaatiston pisteessä $(x, 0)$ ja E pisteessä $(a-x, b)$ ja Pythagoraan lauseen mukaan

$$z^2 = \big((a - x) - x\big)^2 + b^2.$$

Ratkaistaan yhtälöstä z sijoittamalla $x = (a^2 - b^2)/2a$

$$z^2 = \big((a - x) - x\big)^2 + b^2 \;\Leftrightarrow\; z^2 = (a - 2x)^2 + b^2 \;\Leftrightarrow\; z^2 = \left(a - 2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow\; z^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(b^2 + a^2\right).$$

Koska pituus $z > 0$, saadaan

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

SARJA A: $a = 16$ cm ja $b = 10$ cm. Sijoittamalla saadaan $EF = 5\sqrt{89}/4 \approx 11{,}79$ cm.

SARJA B: $a = 14$ cm ja $b = 10$ cm. Sijoittamalla saadaan $EF = 10\sqrt{74}/7 \approx 12{,}29$ cm.

SARJA C: $a = 12$ cm ja $b = 9$ cm. Sijoittamalla saadaan $EF = 45/4 \approx 11{,}25$ cm.

SARJA D: $a = 18$ cm ja $b = 12$ cm. Sijoittamalla saadaan $EF = 4\sqrt{13} \approx 14{,}42$ cm.

5. Eräs lääke otetaan ajan hetkellä $t = 0$. Lääkkeen pitoisuus elimistössä hetkellä t saadaan yhtälöstä

$$C(t) = 1{,}8e^{-\frac{(1{,}6-2t)^2}{3}}.$$

a) Kuinka kauan lääkkeen pitoisuus elimistössä kasvaa? (3 p.)

b) Toisen lääkkeen saa ottaa aikaisintaan silloin kun lääkkeen pitoisuus elimistössä on $C(t_{max}) = 0{,}2$. Kuinka kauan ensimmäisen lääkkeen ottamisen jälkeen on odotettava ennen kuin saa ottaa toisen lääkkeen?

(3 p.)

Ratkaisu:

(a) Etsitään funktion $C(t)$ maksimikohta. Derivoituvan funktion mahdolliset paikalliset maksimi- ja minimikohdat löytyvät derivaataan nollakohdista. Derivoidaan funktio $C(t)$. Saadaan

$$C'(t) = 1{,}8e^{-\frac{(1{,}6-2t)^2}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}(1{,}6 - 2t)(-2)\right).$$

Koska eksponenttifuntion arvo on aina positiivinen, niin $C'(t) = 0$ jos ja vain jos $1{,}6 - 2t = 0$. Derivaatta on siis nolla jos ja vain jos $t = 0{,}8$. Koska $C'(0{,}5) > 0$ ja $C'(1) < 0$, derivaatan nollakohta $t = 0{,}8$ on funktion C maksimikohta. Lääkkeen pitoisuus kasvaa ajanhetkeen $t = 0{,}8$ asti.

(b) Ratkaistaan yhtälö $C(t) = 0{,}2$.

$$
\begin{aligned}
& 1{,}8e^{-\frac{(1{,}6-2t)^2}{3}} = 0{,}2 \\
\Leftrightarrow\ & e^{-\frac{(1{,}6-2t)^2}{3}} = 0{,}2/1{,}8 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{(1{,}6-2t)^2}{3} = \ln(0{,}2/1{,}8) \\
\Leftrightarrow\ & (1{,}6-2t)^2 = -3 \cdot \ln(0{,}2/1{,}8) \\
\Leftrightarrow\ & 1{,}6 - 2t = \pm\sqrt{-3 \cdot \ln(0{,}2/1{,}8)} \\
\Leftrightarrow\ & -2t = -1{,}6 \pm \sqrt{-3 \cdot \ln(0{,}2/1{,}8)} \\
\Leftrightarrow\ & t = 0{,}8 \pm 0{,}5\sqrt{-3 \cdot \ln(0{,}2/1{,}8)}.
\end{aligned}
$$

Muuttujan t arvoiksi saadaan $0{,}8 + 0{,}5\sqrt{-3 \cdot \ln(0{,}2/1{,}8)} \approx 2{,}0837$ ja $0{,}8 - 0{,}5\sqrt{-3 \cdot \ln(0{,}2/1{,}8)} \approx -0,4837$.

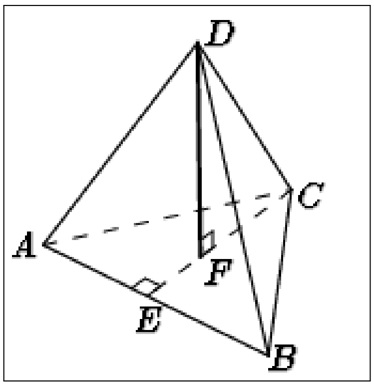
Koska $t > 0$, negatiivinen tulos ei käy ratkaisuksi. Siis lääkkeen pitoisuus on laskenut kysyttyyn arvoon ajanhetkellä $t = 2{,}1$.

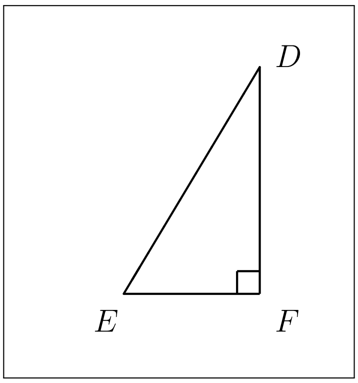
6. Neljä tennispalloa pakataan mahdollisimman pieneen tetraedrin muotoiseen pahvipakkaukseen. Jokaisen tennispallon säde on 3,4 cm. Kuinka paljon pahvia kuluu? (6 p.)

Vihje 1: Tetraedri on kappale, jonka sivutahkoina on neljä tasasivuista kolmiota.

Vihje 2: Tasasivuisen kolmion korkeusjanat leikkaavat toisensa suhteessa 1:2.

Ratkaisu:





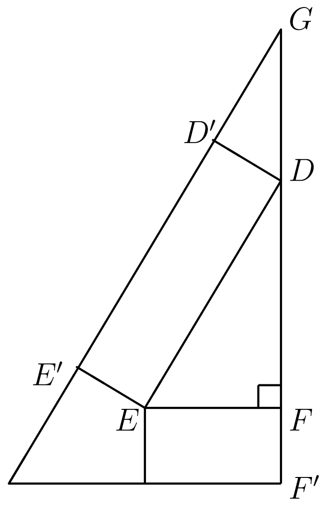
Olkoot tennispallojen keskipisteet A, B, C ja D. Nyt $ABCD$ on tetraedri, jonka särmän pituus on $2r$.

Ratkaisussa kaikille janoille ja niiden pituuksille käytetään samaa merkintää. Esimerkiksi janan AB pituudelle käytetään merkintää AB.

Pythagoraan lauseen mukaan sivutahkokolmion ABC korkeus $EC = ED = r\sqrt{3}$. Koska tasasivuisen kolmion ABC korkeusjanat leikkaavat toisensa suhtesesa 1:2 ja piste F on korkeusjanojen leikkauspiste, niin $EF = \frac{\sqrt{3}}{3}r$.

Kolmiosta EFD saadaan Pythagoraan lauseen mukaan

$$FD = \sqrt{ED^2 - EF^2} = r\sqrt{3 - 3/9} = 2r\frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Olkoot E', F' ja D' pahvitetraedrin pinnalla olevia ja kuvan mukaisia pisteitä. Kuvassa $EE' = FF' = DD' = r$. Koska kulmat $D'GD$ ja EDF ovat saman kohtaisina kulmina yhtäsuuria, saadaan verranto

$$\frac{DD'}{DG} = \frac{EF}{ED}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä

$$DG = \frac{DD' \cdot ED}{EF} = r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}/3} = 3r$$

Pahvitetraedrin korkeus

$$GF' = DG + FD + FF' = 3r + 2r\frac{\sqrt{6}}{3} + r = \left(4 + 2\frac{\sqrt{6}}{3}\right) r.$$

Kun pahvitetraedrin särmän pituus on $2s$, niin aiemmin tetraedrin korkeudelle johdetun kaavan perusteella korkeus $GF' = 2s\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Nyt $2s = \frac{3}{\sqrt{6}}GF' = \frac{3}{\sqrt{6}}(4 + 2\frac{\sqrt{6}}{3})r = (\frac{12}{\sqrt{6}} + 2)r$.

Pahvia kuluu $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2s(s\sqrt{3}) = 4s^2\sqrt{3}$.

SARJA A: $r = 3,4$ cm. ($2s \approx$ 23,5 cm.) Ala on 953,0 cm$^2 \approx$ 9,5 dm^2.

SARJA B: $r = 3,2$ cm. ($2s \approx$ 22,1 cm.) Ala on 844,2 cm$^2 \approx$ 8,4 dm^2.

SARJA C: $r = 3,6$ cm. ($2s \approx$ 24,8 cm.) Ala on 1068 cm$^2 \approx$ 11 dm^2.

SARJA D: $r = 3,8$ cm. ($2s \approx$ 26,2 cm.) Ala on 1190 cm$^2 \approx$ 12 dm^2.