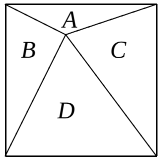
TKK, TTY, OY / Arkkitehtiosastot

Valintakuulustelujen matematiikan koe 17.5.2004

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun.

1. Neliön kärjet ovat pisteissä $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ja $(0,1)$. Neliön sisältä valitaan piste P, joka yhdistetään janoilla jokaiseen neliön kärkeen. Näin syntyy neljä kolmiota, joiden pinta-alat ovat kuvion mukaisesti A, B, C ja D. Määritä pisteen P koordinaatit, kun pinta-alojen suhteille on voimassa



$$A : B : C : D = 1 : 2 : 3 : 4.$$

2. Eurooppalaisten kaupungistumisaste (kaupungeissa asuvien osuus koko väestöstä) v. 1970 oli 64,6 % ja v. 2004 jo 74,0 %. Oletetaan, että kaupungistumisasteen p muutokselle Δp aikavälillä Δt on on voimassa approksimaatio

$$\Delta p = c \cdot p_0 \cdot (100 - p_0) \cdot \Delta t,$$

missä p_0 on kaupungistumisaste aikavälin alussa ja $c > 0$ on vakio (eli se on kaikille aikaväleille sama). Ajan yksikkö on vuosi ja p ilmaistaan prosentteina.

   a) Määritä vakio c käyttämällä aikaväliä 1970–2004.

   b) Esitä malliin perustuva arvio eurooppalaisten kaupungistumisasteesta aikavälin 2004–2030 lopussa.

3. Suora $y = 2 - 2x$ rajaa yhdessä x- ja y-akseleiden kanssa suorakulmaisen kolmion. Mikä kolmion hypotenuusan piste (x_0, y_0) on yhtä kaukana vaakasuorasta kateetista ja pystysuoran kateetin keskipisteestä?

4. Aurinko paistaa vaakasuoralla pöydällä olevaan kappaleeseen. Kappale on saatu leikkaamalla r-säteisestä pallosta pois pallosegmentti, jonka korkeus on $r/2$, ja sen leikkauspinta on pöytää vasten.

   a) Kuinka suuri voi Auringon korkeuskulma enintään olla, jotta valonsäteet osuisivat jossakin kohdassa kappaleen juureen?

   b) Kuinka pitkälle kappaleen varjo ulottuu sen pohjan keskipisteestä, kun Auringon korkeuskulma on 45°?

   Voidaan olettaa, että valonsäteet ovat yhdensuuntaisia. Korkeuskulmalla tarkoitetaan vaakatason ja valonsäteiden välistä terävää kulmaa.

5. Eräässä suurpiirteisessä yliopistossa kokeiden kesto päätetään seuraavalla tavalla: ensin arvotaan kokeen alkamisaika t_0 tasatunneista $\{9, 10, 11\}$ ja sen jälkeen arvotaan kokeen päättymisaika tasatunneista $\{t_0 + 1, \ldots, 13\}$.

   a) Millä todennäköisyydellä koe pidetään kello 9–12?

   b) Millä todennäköisyydellä koe kestää ainakin kolme tuntia?

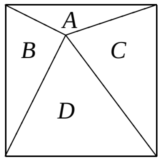
6. Pöydällä on kolme samanlaista palloa, joiden säde on 3 cm. Kukin pallo koskettaa kahta muuta. Pallot yritetään peittää puolipallon muotoisella kuvulla. Kupu osoittautuu kuitenkin liian pieneksi, sillä sen reuna jää kaikkialla 1 cm:n korkeudelle pöydän pinnasta. Mikä on kuvun säde?

TH, TTU, UU / Arkitektavdelningarna

Inträdesförhör i matematik 17.5.2004

Anvisningar. Placera varje uppgift *på egen sida*. Ge klart utarbetade *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar bör överstryckas*. Om icke-överstruckna lösningar föreligger för samma uppgift, så bedöms den sämsta av dessa.

1. Hörnen hos en kvadrat finns i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ja $(0,1)$. Inne i kvadraten väljes en punkt P, som med hjälp av linjesegment sammanbindes med vart och ett av kvadratens hörn. Därvid uppstår fyra trianglar, vars areor är A, B, C respektive D, som i figuren. Bestäm punktens P koordinater, om det för förhållandena mellan areorna gäller att



$$A : B : C : D = 1 : 2 : 3 : 4.$$

2. Europeernas urbaniseringsgrad (andelen stadsbor i hela befolkningen) var 64,6 % år 1970 och redan 74,0 % år 2004. Antag, att approximationen

$$\Delta p = c \cdot p_0 \cdot (100 - p_0) \cdot \Delta t,$$

gäller för ändringen Δp i urbaniseringsgraden p under tidsintervallet Δt, där p_0 är urbaniseringsgraden vid tidsintervallets början och $c > 0$ är en konstant (dvs. den är densamma för alla tidsintervall). Tidsenheten är år och p ges i procent.

   a) Bestäm konstanten c genom att utnyttja tidsintervallet 1970–2004.

   b) Ange skattningen av europeernas urbaniseringsgrad, som modellen ger för slutet av tidsintervallet 2004–2030.

3. Linjen $y = 2 - 2x$ begränsar tillsammans med x- och y-axlarna en rätvinklig triangel. Vilken punkt (x_0, y_0) på hypotenusan är lika långt från den horisontella kateten som från den vertikala katetens mittpunkt?

4. Solen skiner på en kropp, som står på ett horisontellt bord. Kroppen har man fått genom att skära bort ett klotsegment med höjden $r/2$ från ett klot med radien r, och dess snittyta vilar mot bordet.

   a) Hur stor får solens höjdvinkel högst vara för att solstrålarna skall träffa någon punkt på kroppens bascirkel?

   b) Hur långt når kroppens skugga från bottnets mittpunkt, då solens höjdvinkel är $45°$?

   Vi kan antaga att solstrålarna är parallella. Med höjdvinkeln avses den spetsiga vinkeln mellan horisontalplanet och solstrålarna.

5. Vid ett visst storsint universitet bestäms längden på förhör på följande sätt: först lottas starttiden t_0 för förhöret från de hela timmarna $\{9, 10, 11\}$ och därefter lottas sluttiden för förhöret från de hela timmarna $\{t_0 + 1, \dots, 13\}$.

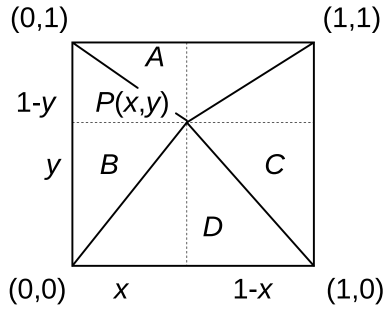
   a) Vad är sannolikheten för att ett förhör varar från 9 till 12?

   b) Vad är sannolikheten för att ett förhör varar i åtminstone tre timmar?

6. På ett bord står tre identiska klot med radien 3 cm. Vart och ett av kloten vidrör de två andra. Man försöker täcka över kloten med en kupa i form av en halvsfär. Kupan visar sig dock vara för liten, eftersom dess rand är överallt 1 cm ovanför bordsytan. Bestäm kupans radie.

HTKK, TTY, OY/Arkkitehtiosastot
Valintakuulustelujen matematiikan koe 17.5.2004
Ratkaisut ja pisteytys

1. Merkitään $P=(x,y)$. Tällöin neliöstä voidaan lukea kolmioiden pinta-aloiksi



A:n pinta-ala $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-y)=\frac{1}{2}(1-y)$

B:n pinta-ala $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x=\frac{1}{2}x$

C:n pinta-ala $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-x)=\frac{1}{2}(1-x)$

D:n pinta-ala $=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y=\frac{1}{2}y$ **3 pist.**

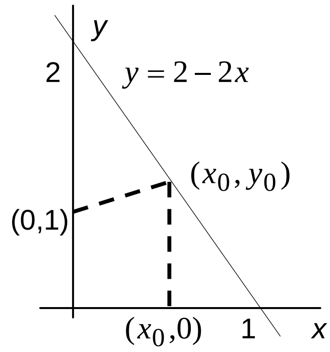
Koska $A:B:C:D=1:2:3:4$, niin $B:C=\frac{1}{2}x:\frac{1}{2}(1-x)=2:3$, eli $x=\frac{2}{5}$. Vastaavasti $A:B=\frac{1}{2}(1-y):\frac{1}{2}x=1:2$, eli $y=1-\frac{1}{2}x$. Siten $y=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$. Piste $P=(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$.
Laskemalla voidaan todeta, että myös $C:D=3:4$. **3 pist.**

2. a) Aikavälillä 1970-2004 on $p_0=64{,}6$, $\Delta p=9{,}4$ ja $\Delta t=34$. Sijoittamalla malliin saadaan yhtälö $9{,}4=c\cdot 64{,}6\cdot(100-64{,}6)\cdot 34$, josta $c\approx 1{,}20896\cdot 10^{-4}\approx 1{,}21\cdot 10^{-4}$. **3 pist.**

b) Aikavälillä 2004-2030 on $p_0=74{,}0$ ja $\Delta t=34$. Kun vakio *c* nyt tunnetaan, malli antaa $\Delta p\approx 1{,}20896\cdot 10^{-4}\cdot 74{,}0\cdot(100-74{,}0)\cdot 26\approx 6{,}0$. Arvioksi saadaan siis 74,0+6.0 = 80,0% **3 pist.**

3. Pisteiden (x_0,y_0) ja $(x_0,0)$ välinen etäisyys täytyy olla yhtä suuri kuin pisteiden (x_0,y_0) ja (0,1) välinen etäisyys (kts. kuvio). Tällöin pätee yhtälö

$$y_0=\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-1)^2}\,.$$



Tästä korottamalla puolittain 2. potenssiin saadaan yhtälö

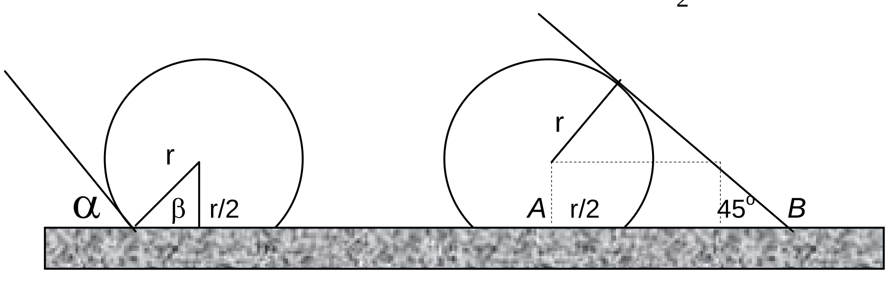
$$x_0^2-2y_0+1=0\,.$$ **2 pist.**

Koska piste (x_0,y_0) on suoralla $y=2-2x$, täytyy olla $y_0=2-2x_0$, joten vm. yhtälöstä tulee x_0:lle ehtöyhtälö

$$x_0^2+4x_0-3=0\,.$$ **2 pist.**

Tämän ratkaisut ovat $x_0=-2\pm\sqrt{7}$, joista vain $x_0=-2+\sqrt{7}$ kelpaa. Koska tätä vastaa $y_0=2-2x_0=6-2\sqrt{7}$, kysytty piste on $(-2+\sqrt{7},\,6-2\sqrt{7})$. **2 pist.**

4. Tarkastellaan kappaletta ja valonsäteitä projisioituna pystytasolle.
a) Suurin korkeuskulma on kappaleen alareunaan piirretyn tangentin ja vaakatason välinen kulma α (kts. kuva). Koska $\sin\beta=\frac{r/2}{r}=\frac{1}{2}$, on β = 30°. Tällöin α = 180° - 90° - 30° = 60°. **3 pist.**
b) Kysytty etäisyys on pisteiden *A* (pohjan keskipiste) ja *B* (kaukaisin varjopiste) välinen etäisyys. Tämä ilmeisesti on $r\sqrt{2}+r/2=r(\sqrt{2}+\frac{1}{2})$ **3 pist.**

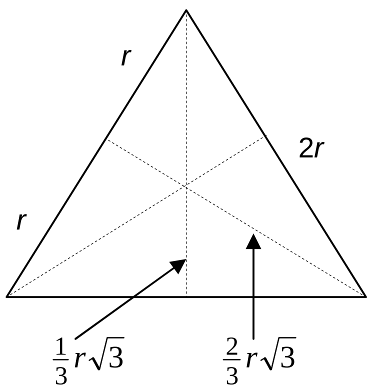


5. a) Todennäköisyys sille, että koe alkaa klo 9, on 1/3. Tällöin päättymisaika arvotaan joukosta $\{10, 11, 12\}$, ja todennäköisyys päättymisajalle klo 12 on myös 1/3. Kysytty todennäköisyys on siten (1/3)·(1/3) = 1/9. **3 pist.**

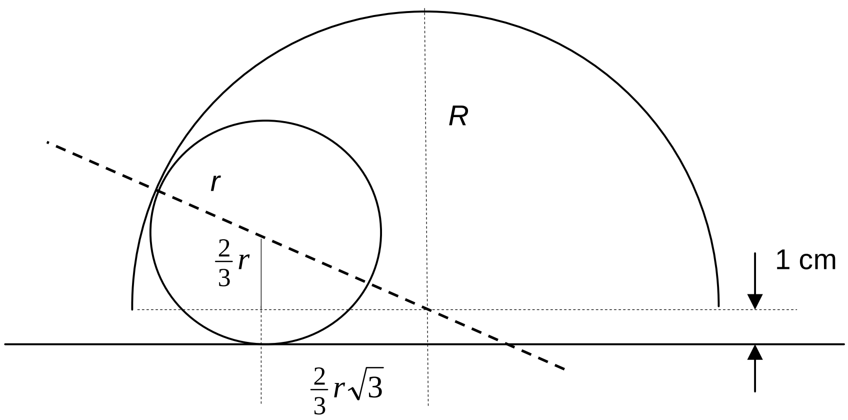
b) Suotuisat vaihtoehdot sille, että koe kestää ainakin 3 tuntia, ovat koeajat 9-12, 9-13 ja 10-13. Kaikki nämä ovat erillisiä toisistaan riippumattomia tapahtumia. Kunkin koeajan alkamisen todennäköisyys on 1/3. Koeaikojen 9-12 ja 9-13 päättymisajan todennäiköisyys on 1/4 (koska arvonta tapahtuu joukosta $\{10, 11, 12, 13\}$) , ja koeajan 10-13 päättymisajan todennäköisyys on 1/3 (koska arvonta tapahtuu joukosta $\{11, 12, 13\}$). Tällöin kysytty todennäköisyys on

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{18} \approx 0{,}28\,.$$ **3 pist.**

6. Olkoon pallojen säde *r* (*r* = 3 cm). Ylhäältä katsottuna pallojen keskipisteet muodostavat tasasivuisen kolmion, jonka sivun pituus on 2r. Koska korkeusjanojen, joiden pituudeksi helposti lasketaan $r\sqrt{3}$, yhteinen leikkauspiste jakaa jakaa korkeusjanat suhteessa 1:2, saadaan leikkauspisteen etäisyydeksi kolmion sivuista $(1/3)\cdot r\sqrt{3} = r/\sqrt{3}$. ja kolmion kärjistä $(2/3)\cdot r\sqrt{3} = 2r/\sqrt{3}$. Huomataan myös, että ylhäältä katsottuna leikkauspiste yhtyy kuvun keskipisteeseen. **2 pist.**



Muodostetaan seuraavaksi pystysuora poikkileikkaus yhden pallon keskipisteen ja kuvun keskipispisteen kautta:



Koska pallo koskettaa kupua sisäpuolelta, niin kosketuskohtaan asetettu kuvun tangenttitason normaalisuora kulkee sekä pallon keskipisteen että kuvun keskipisteen kautta. Leikkauskuvioon voidaan piirtää suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on osa haettavaa kuvun sädettä *R* . Koska kyseisen kolmion kateetit ovat $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$ ja $\frac{2}{3}r$ (pallon säde *r* = 3 cm, jolloin *r* -1 cm = $\frac{2}{3}r$), kuvun säteelle *R* voidaan kirjoittaa

$$R = r + \sqrt{\left(\frac{2}{3}r\right)^2 + \left(\frac{2}{3}r\sqrt{3}\right)^2} = r + \frac{4}{3}r = \frac{7}{3}r = \frac{7}{3}\cdot 3 \text{ cm} = 7 \text{ cm.}$$ **4 pist.**