Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. **Liite:** Kaavakokoelma. **Apuvälineet:** Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

A1 Tarkastellaan arkkitehtitoimistossa kalenterivuosittain juodun kahvin määrää. Taulukossa esitetään annetun vuoden kulutuksen muutos edeltävän vuoden kulutukseen verraten.

(a) Miten monta prosenttia vuosittainen kulutus kasvoi vuodesta 2004 vuoteen 2007?

(b) Miten suuri vakio vuotuinen prosentuaalinen muutos a-kohdan tarkasteluvälillä olisi johtanut samaan kokonaismuutokseen?

Vuosi	Muutos
2003	3,00%
2004	2,25%
2005	3,10%
2006	-4,20%
2007	6,50%

Anna vastaukset 0,01 prosenttiyksikön tarkkuudella.

A2 Navettaa ympäröi tasainen nurmikenttä. Rakennuksen pohja on suorakulmio kooltaan 25,00 m kertaa 15,00 m.

Rakennuksen lyhyemmällä ulkoseinällä olevaan koukkuun kiinnitetään 20,00 m pituisella köydellä lehmä. Merkitään symbolilla x koukun etäisyyttä rakennuksen lähimmästä nurkasta.

(a) Laske pinta-ala $A(x)$, jolta lehmä voi syödä heinää.

(b) Mitkä ovat pinta-alan $A(x)$ ääriarvot (maksimi/minimi) ja näitä vastaavat kiinnityspisteiden etäisyydet x?

Koukun korkeus maasta ja lehmän ulottuvuudet voidaan jättää huomioimatta. Anna b)-kohdan pinta-ala $0{,}01\,\mathrm{m}^2$ ja kiinnityspiste 0,01 m tarkkuudella.

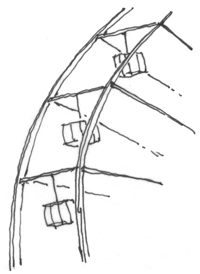
A3 Suorakulmaisen särmiön muotoinen jäätiili halkaistaan kahteen osaan tasolla, joka kulkee tarkalleen kolmen särmiön kärkipisteen kautta.

(a) Kuinka monella tavalla leikkaustaso voidaan valita? Perustele vastaustasi lyhyesti.

(b) Mikä on saatujen palojen tilavuuksien suhde (suuremman suhde pienempään) kunkin leikkaustason valinnan tapauksessa?

A4 Maailmanpyörässä on 23 pohjaltaan pyöreää tasapohjaista suoran lieriön muotoista koria. Korit on ripustettu tasavälein maailmanpyörän kehälle, vertaa annettuun hahmotelmakuvaan.

Kiinnitystangon alapää on kiinnitetty kohtisuoraan korin pohjaa vasten, pyöreän pohjan keskipisteeseen. Kiinnitystangon yläpää on kiinnitetty kohtisuoraan maailmanpyörän kehällä olevaan akseliin. Akseli pääsee vapaasti pyörimään maailmanpyörän pyörimistasossa.



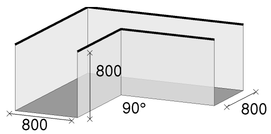
Tangon pituus $L = 3{,}00\,\mathrm{m}$, ja korien pohjan halkaisija $d = 2{,}00\,\mathrm{m}$. Mikä maailmanpyörän halkaisijan on vähintään oltava, jotta korit eivät heilahtaessaankaan kosketa toisiaan?

Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

A5 Molemmin puolin L-muotoista laituria on kaide. Kaiteiden välinen vapaa etäisyys ja kaiteiden korkeus ovat 800 mm. Kaiteiden päälle asetetaan rantapallo, jonka halkaisija on 1000 mm.

(a) Laske pallon lyhin etäisyys laituritasosta, kun pallo lepää kaiteiden päällä kulkuväylän suoralla osuudella.

(b) Pallo vieritetään kaiteiden päällä laiturin kulman ympäri. Mikä on pallon lyhin etäisyys laituritasosta matkan aikana.



Anna vastaukset millimetrin tarkkuudella.

A6 Talonrakennushankkeessa on tultu vaiheeseen, jossa mahdollisimman pian tehdään seinien rappaus ja sitä edeltävä pohjustustyö. Kummatkin mainitut työvaiheet kestävät yhden työpäivän, kunakin päivänä voidaan tehdä korkeintaan yksi työvaihe.

Pohjustuksen tekee Pontus, ja se vaatii onnistuakseen sateettoman päivän. Rappaus voidaan poutapäivänä tehdä ilman Pontustakin, mutta vain hän osaa suojata seinän niin hyvin, että rappaus onnistuu myös sateella.

Taulukossa on meteorologilta saatu arvio sateen todennäköisyydestä seuraavina päivinä. Taulukossa on myös (kahvitauolla laadittu) arvio, että Pontus on tuolloin (tällä) työmaalla. Kaikki tapahtumat oletetaan toisistaan riippumattomiksi.

Millä todennäköisyydellä annettujen kolmen päivän kuluessa saadaan

(a) pohjustus,

(b) rappaus

onnistuneesti tehdyksi? Anna vastaus sadasosan tarkkuudella.

	$P(\text{Sataa})$	$P\begin{pmatrix}\text{Pontus}\\ \text{paikalla}\end{pmatrix}$
ma	0,12	0,10
ti	0,14	0,90
ke	0,61	0,80

Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och delfrågorna har inte nödvändigtvis samma vikt i bedömningen. **Bilaga:** Formelsamling. **Instrument:** Skrivinstrument och funktionsräknare.

A1 Vi studerar mängden drucken kaffe per kalenderår på ett arkitektkontor. I tabellen ges det angivna årets konsumptions ändring jämfört med det föregångna årets konsumption.

(a) Med hur många procent ökade den årliga konsumptionen från år 2004 till år 2007?

(b) Hur stor konstant årlig procentuell tillväxt hade gett samma totala ändring under a-delens tidsintervall?

Ge svaren med 0,01 procentenhets noggranhet.

År	Ändring
2003	3,00%
2004	2,25%
2005	3,10%
2006	-4,20%
2007	6,50%

A2 En lada är omgiven av en plan gräsmatta. Ladans botten är en rektangel med måtten 25,00 m gånger 15,00 m.

En ko fästs med ett 20,00 m långt rep i en krok i ladans kortare yttervägg. Låt x beteckna krokens avstånd från byggnadens närmaste hörn.

(a) Beräkna arean $A(x)$, från vilken kon kan beta gräs.

(b) Vilka är areans $A(x)$ extremvärden (maximi/minimi) och motsvarande fästpunkter x för kroken?

Krokens höjd ovanför marken och kons dimensioner behöver inte beaktas. Ge arean i b) med 0,01 m^2 och krokens fästpunkt med 0,01 m noggranhet.

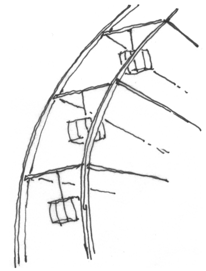
A3 Ett istegel i form av ett rätblock delas i två med hjälp av ett plan, som går genom exakt tre av rätblockets hörn.

(a) På hur många sätt kan det skärande planet väljas? Begrunda kort ditt svar.

(b) Vilka värden kan förhållandet mellan de så sätt uppkomna delarnas volymer få (den större i förhållandet till den mindre) i a-delens olika fall?

A4 Ett pariserhjul har 23 korgar på formen av räta circulära cylindrar med plan, cirkulär botten. Korgarna är upphängda med jämna mellanrum på pariserhjulets rand, jämför med den givna schematiska bilden.

Fäststångens nedre ända är fäst vinkelrätt mot korgens botten i det cirkulära bottnets mittpunkt, medan dess övre ända är fäst vinkelrätt på en axel på Pariserhjulets rand. Axeln kan rotera fritt i Pariserhjulets rotationsplan.



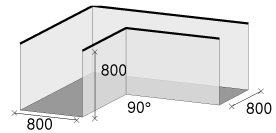
Stångens längd är $L = 3{,}00$ m, och korgarnas botten har diametern $d = 2{,}00$ m. Hur stor måste Pariserhjulets diameter vara för att korgarna inte skall kunna stöta ihop ens om de gungar?

Ge svaret med en centimeters noggrannhet.

A5 På vardera sidan om en L-formad brygga finns ett räcke. Avståndet mellan räckerna och räckernas höjd är 800 mm. En badboll, vars diameter är 1000 mm, läggs på räckerna.

(a) Beräkna bollens kortaste avstånd från bryggans plan, då bollen vilar på räckena på en rak del av bryggan.

(b) Bollen rullas på räckerna runt hörnet på bryggan. Vilket är bollens kortaste avstånd från bryggans plan under färden?



Ge svaren med en millimeters noggrannhet.

A6 Vid ett husbygge har man kommit till det skedet, då man så snabbt som möjligt rappar väggarna och grundar före det. Bägge nämnda arbetsmomenten tar en hel arbetsdag i anspråk och under varje arbetsdag kan endast ena arbetsmomentet utföras. Grundningen utförs av Pontus och det krävs att det är uppehåll hela dagen. Rappningen kan utföras utan Pontus om det är uppehåll, men bara han kan skydda väggen så väl att rappningen även kan utföras vid regn.

I tabellen finns meteorologernas uppskattning av sannolikheten för regn under de närmaste dagarna. I tabellen finns också en (under kafferasten sammanställd) uppskattning av sannolikheten för att Pontus då är på (den här) arbetsplatsen. Alla händelserna antas vara oberoende av varandra.

Vad är sannolikheten för att

(a) grundningen,

(b) rappingen

lyckas under dessa tre dagar. Ge svaret med en hundradedels noggrannhet.

	$P(\text{Regn})$	$P\begin{pmatrix}\text{Pontus}\\ \text{på plats}\end{pmatrix}$
mån	0,12	0,10
tis	0,14	0,90
ons	0,61	0,80

Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps.* Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted. **Attachment:** Table of formulae. **Allowed instrumets:** Writing instruments, non–programmable calculators, non–electronic dictionaries.

A1 Let us consider the amount of coffee consumed in architects' studio per calendar year. The table exhibits the change in the consumption on the indicated year compared to the consumption on the previous year.

(a) How many percent did the yearly consumption grow from 2004 to 2007?

(b) How large constant yearly growth rate in the time-interval of the question (a) would have yielded the same accumulated change?

Year	Change
2003	3.00%
2004	2.25%
2005	3.10%
2006	-4.20%
2007	6.50%

Give your answers with the accuracy of 0.01 percentage points.

A2 A barn is surrounded by an even grass lawn. The building has a rectangular base of size 25.00 m times 15.00 m.

A cow is attached to a hook placed on a shorter wall of the barn with a 20.00 m long rope. Let us denote the distance of the hook from the nearest corner of the building by the symbol x.

(a) Calculate the area $A(x)$ the cow is able to graze.

(b) Which are the extremal values (maximums/minimums) of the area $A(x)$ and the attachment points x corresponding to those values?

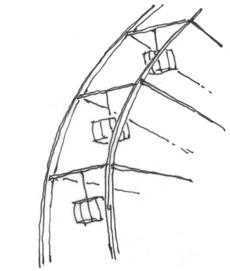
The height of the hook from the ground and the dimensions of the cow may be ignored. Give the area in b) with an accuracy of $0.01\,\mathrm{m}^2$ and the attachment points with an accuracy of 0.01 m.

A3 A cuboid shaped ice brick is cut in two by a plane that goes through precisely three of the corners of the cuboid.

(a) In how many ways can the cutting plane be chosen? Justify briefly your answer.

(b) What is the ratio of the volumes of the two pieces (the larger to the smaller) for each choice of the cutting plane?

A4 A Ferris wheel has 23 wagons, each wagon is a right cylinder with flat circular bottom. The wagons hang on even intervals on the perimeter of the wheel, compare with the attached schematic figure.



The lower end of the supporting rod for each wagon is attached orthogonally to the center point of the circular bottom of the wagon. The upper end of the supporting rod is attached orthogonally to a shaft on the perimeter. The shaft can freely rotate in the plane of rotation of the Ferris wheel.

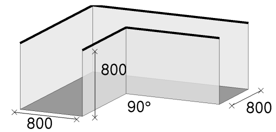
The length of the supporting rod is $L = 3.00\,\mathrm{m}$, and the diameter of the bottom of the wagons is $d = 2.00\,\mathrm{m}$. How large at least should the diameter of the Ferris wheel be to prevent the wagons from colliding even if they swing?

Give the answer with an accuracy of one centimeter.

A5 On both sides of an L-shaped pier there are railings. The free distance between the railings as well as the height of the railings are both 800 mm. On the railings one places a ball with a diameter 1000 mm.

(a) Calculate the shortest distance of the ball from the pier as the ball is placed on the straight part of the railings.

(b) The ball is rotated around the corner of the pier. What is the shortest distance of ball from the pier during the rotation.



Give the answers with an accuracy of one millimeter.

A6 A building project has reached a state where as soon as possible one needs to accomplish two work phases, stuccoing[1] and preceding priming of walls. Both phases will require one working day, on each day one may only work on one work phase.

The priming is done by Pontus and it requires a non-rainy day. The stuccoing can be done by anybody on a non-rainy day, but only Pontus can protect the wall well enough to enable the stuccoing even on a rainy day.

The table lists the probabilities for rain for the next days estimated by a meteorologist. The table also lists the estimates (made on a coffee break) for Pontus being on (this) work site in the next days. All events are assumed to be independent.

What is the probability that

(a) the priming,

(b) the stuccoing

will be completed during the given three days? Give the answer with an accuracy of one hundredth.

	$P(\text{Rain})$	$P\begin{pmatrix}\text{Pontus}\\ \text{on-site}\end{pmatrix}$
Mon	0.12	0.10
Tue	0.14	0.90
Wed	0.61	0.80

[1] stuccoing is a type of coating of walls with lime, sand and concrete

Dia-valinta 2008

Arkkitehtivalinnan matematiikan koe 19.5.2008 - vastaukset

Tehtäviin voi olla useita oikeita vastaustapoja.

A1 Olkoon p_n suhteellinen kokonaismuutos verrattaessa koko vuoden n kulutusta vuoden $n-1$ kulutukseen.

a) Kokonaismuutos

$$1+q=(1+p_{2005})(1+p_{2006})(1+p_{2007})\approx 1,0518984\ldots,\qquad q\approx 5,19\%.$$

b) Tasainen kasvu

$$1+q=(1+r)^3,\quad 1+r=(1+q)^{1/3}=1,0170085\ldots,\quad r\approx 1,70\%.$$

Arvostelu Osavastauksista saa a) 3p + b) 3p. Approksimaation $q\approx p_1+p_2+p_3$ tai $r\approx(p_1+p_2+p_3)/3$ käyttö ei ole perusteltua kysytyllä tarkkuudella.

A2 Merkitään seinän leveyttä $l=15$ ja köyden pituutta $a=20$.

a) Merkitsemällä $r=a-l+x=5+x$ ja $R=a-x=20-x$

$$A(x)=\frac{\pi}{4}(2a^2+R^2+r^2)=\frac{\pi}{4}\left(1225-30x+2x^2\right).$$

b) Derivoimalla avoimella välillä $x\in(0,l/2)$ nähdään, että pinta-ala on kasvava funktio:

$$A'(x)=\pi(x-\frac{1}{2}l)=\pi\left(x-\frac{15}{2}\right)>0.$$

Ääriarvot saavutetaan siis päätepisteissä:

Minimi: $x=0$ (jolloin $r=a-l$, $R=a$,) $A=2225\,\pi/8\approx 962.11$.

Maksimi: $x=l/2=7,5$, (jolloin $r=R=a-l/2$,) $A=1225\,\pi/4\approx 873.76$.

Arvostelu Osatehtävät 3p+3p. Jos pinta-ala on laskettu vain kahdessa erillisessä pisteessä, kuten $x=0$ ja $x=7.5$, annetaan 2p. Ääriarvokohtien sijainti vaatii perustelun. Oleellisesti väärä geomterinen tulkinta useimmiten tuhoaa loppulaskun.

A3 a) Kunkin kärkipisteen Q viereisten pisteiden P_1,P_2,P_3 kautta voidaan piirtää vaaditun kaltainen taso, jolloin muodostuu tetraedri. Kulmapisteitä, vastaavia leikkaustasoja ja tetraedrejä[2] on kaikkia sama määrä; kahdeksan.

Toisaalta, muita mahdollisia leikkaustasoja ei ole: Jos pisteistä kaksi ovat samalla suorakulmion särmällä, täytyy tason olla muös kolmanteen kulmapisteeseen päättyvän (samasuuntaisen) särmän suuntainen. Näin tasolla on välttämättä neljä kärkipistettä, mikä on ristiriita.

b) Olkoot alkuperäisen suorakulmaisen särmiön tahkot ovat aina pituudelaan a,b,c. Koko suorakulmaisen särmiön tilavuus on $V=abc$.

[2] Tetraedejä kahta eri muotoa: mitat aina a,b,c mutta ”kätisyys” vaihtelee.

Mielivalaisen kulmapisteen Q määräämä tetraedrin korkeus, leveys ja pituus ovat aina (jossakin järjestyksessä) suorakulmaisen särmiön sivunpituudet a,b,c. Tetraedrin tilavuus on siis $V'=\frac{1}{6}abc$. (Tilavuus ei siis riipu valitusta tetredristä tai tasosta.) V' on myös selvästi alle puolet särmiön tilavuudesta V joten tetraedri on aina pienempi pala.

Kysytty suhde on $\frac{V-V'}{V'}=5$, eikä se riipu tason, eli siis pisteen Q, valinnasta vaikka itse palan muoto riippuukin valinnasta.

Arvostelu Osatehtävät arvostellaan 4p+2p. Perusteluina vaaditaan: i) Tetraedrin tuottavat tapaukset ovat sallittuja, miksi ei ole muita? ii) Tapausten määrä, perustelu, tai luettelo. Kohdassa (b) vaaditaan suhde $\frac{V-V'}{V}$, ei V'/V.

A4 Korin suurimmalle ulottuvuudelle, r, kiinityspisteestään pätee

$$r^2=(d/2)^2+L^2=1+3^2.$$

Merkitään maailmanpyörän sädettä R. Korien kiinnityspisteiden etäisyys kehällä, $2h$, on kiinnityspisteiden keskuskulmaa $\alpha=2\pi/23$ vastaavan jänteen pituus; tarkastellaan näin syntyvän tasakylkisen kolmion puolikasta, josta $h/R=\sin(\alpha/2)$.

Suojavaatimus $h>r$, eli $R\sin(\pi/23)>\sqrt{10}$ eli halkaisija $D=2R>\frac{2\sqrt{10}}{\sin(\pi/23)}$ eli $D\geq 4645\,\text{cm}$.

Arvostelu Osakohdittain: suojatilan koon r laskeminen, 2p; tämän liittäminen maailmanpyörän säteeseen R, 2p; $D=2R$ ratkaiseminen edellisestä 2p.

A5 Merkitään kaiteiden etäisyyttä ja korkeutta d. Pallon säde on $R=500\,\text{mm}$. Pallo kannattuu pisteistä, joissa pallo sivuaa kaidetta. Kannatuspisteet (a-kohdassa 2 ja b-kohdassa 3) määräävät reunapisteinä ”pallon pohjalle” pallokalotin. Pallon pystysuoran alaspäin suuntautuva säde (kateetti) ja kannatuspisteeseen suuntautuva säde (hypotenuusa) määrävät suorakulmaisen kolmion. Merkitään kolmion korkeutta, toista kateettia h.

a) Kannatuspisteitä on kaksi: h on kannatuspisteiden välisen jänteen etäisyys keskipisteestä. $h^2=R^2-(d/2)^2$, josta saadaan etäisyydeksi

$$h=\sqrt{R^2-(d/2)^2}=300,\quad e=d-(R-h)=600\,\text{mm}.$$

b) Kannatuspisteitä on nyt kolme. Pallo sivuaa kaidetta ulkolaidoilla ja kannattuu myös sisäkulmaan. Kannatuspisteiden ja pallon projision keskipisteen väliset kulmat laituritasossa $(\pi/2,\alpha,\alpha)$; saamme $2\alpha+\pi/2=2\pi$ eli $\alpha=3\pi/4$.

Merkitään kannatustason sädettä r: saamme

$$d=r+r\cos(\pi-\alpha)=r(1+\cos(\pi/4)),\quad h^2+r^2=R^2$$

josta $r=d/(1+1/\sqrt{2})\approx 468,6$. $h=\sqrt{R^2-r^2}\approx 174.318$. Edelleen pallon kysytty etäisyys e:

$$e=d-(R-h)=474.318\cdots\approx 474\,\text{mm}$$

Arvostelu Osakohdat arvostellaan 3p + 3p.

A6 Tarkasteltaessa olosuhteita työvaiheille saamme:

	ma	ti	ke	
P(sataa)	0,12	0,14	0,61	
P(Pontus työmaalla)	0,10	0,90	0,80	
P(pohjustusmahdollisuus) =P(ei sada)P(Pontus)	0,0880	0,7740	0,3120	$=p_k$
P(rappausolosuhteet) =P(ei sada)+P(sataa)P(Pontus)	0,9988	0,8740	0,5120	$=q_k$

jossa kaikki parit p_i ja q_j ovat keskenään riipumattomia todennäköisyyksiä.

Merkitään tn että pohjustus on tehty k päivän jälkeen P_k.

a) (Tapa 1) Tarkastellaan komplementtitapahtumaa. Pohjustusta ei tehdä kolmen päivän kuluessa, jos minään päivänä ei ole pohjustusmahdollisuutta:

$$1 - P_3 = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0.141805\ldots$$

josta $P_3 = 0.85819 \cdots \approx 0.86$.

a) (Tapa 2) Alussa rappausta ei (varmasti) ole tehty: $P_0 = 0$. Pohjustus tehdään päivän k kuluessa jos sitä ei ole tehty aikaisemmin, ja tuona päivänä on otolliset olosuhteet

$$P_k = P_{k-1} + (1 - P_{k-1})p_k$$

$$P_0 = 0, \quad P_1 \approx 0.0880\ldots, \quad P_2 \approx 0.793888\ldots, \quad P_3 \approx 0.85819\ldots.$$

Kysytty tn on $P_3 \approx 0,86$.

b) Rappaus tehdään päivän k kuluessa jos olosuhteet ovat otolliset ja pohjustus on tehty viimeistään edeltävänä päivänä. Rappauksen onnistumiselle on kolme *toisensa poissulkevaa* mahdollisuutta:

ma	ti	ke	P	
pohjustus	rappaus		$p_1 q_2$	0.0867680...
pohjustus	ei-rappaus	rappaus	$p_1(1 - q_2)q_3$	0.0010816...
ei-pohjustus	pohjustus	rappaus	$(1 - p_1)p_2 q_3$	0.6197696...
			Σ	0.7076193...

$P(\text{Rappaus 3 päivässä}) = p_1(q_2 + (1 - q_2)q_3) + (1 - p_1)p_2 q_3 \approx 0.71.$

Arvostelu Osakohdat arvostellaan 3p + 3p. Vakavia virheitä ovat toisistaan riippuvien tapahtumien todennäköisyyksien kertominen keskenään ja toisaalta ei toisensa poissulkevien tapausten todennäköisyyksien laskeminen yhteen.