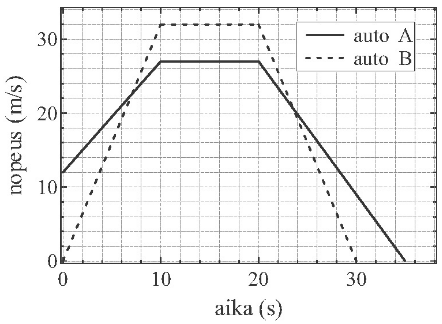
TKK, TTY, LTY, OY, ÅA, TY ja VY insinööriosastojen valintakuulustelujen fysiikan koe 1.6.2005, malliratkaisut.

1 Kuvaan 1 on piiretty kahden suoraviivaisesti samaan suuntaan liikkuvan auton A ja B nopeudet ajan funktiona. Autot ovat rinnakkain ajanhetkellä $t = 0$ s.
a) Kuvaile auton A liikettä ajan funktiona. Kumpi autoista on edennyt pidemmän matkan ajanjakson 0...26 s aikana?
b) Määritä hetki, jolloin autot ovat seuraavan kerran rinnakkain.



Kuva 1

a) (**max 4p**) Auton A liike on

$$\begin{cases} 0\ldots 10\text{ s} & \text{tasaisesti kiihtyvää} \\ 10\ldots 20\text{ s} & \text{tasaista (tai nopeus vakio)} \\ 20\ldots 35\text{ s} & \text{tasaisesti hidastuvaa} \end{cases}$$

Autojen nopeudet saadaan kuvasta 1 ja kiihtyvyydet kuvaajan kulmakertoimista. Matka saadaan laskettua tasaisesti kiihtyvän liikkeen kaavojen avulla. Merkinnät ja lukuarvot taulukossa.

i	t_i (s)	$v_{\mathrm{A}i}$ (m/s)	$v_{\mathrm{B}i}$ (m/s)	$a_{\mathrm{A}i}$ (m/s^2)	$a_{\mathrm{B}i}$ (m/s^2)	$s_{\mathrm{A}i}$ (m)	$s_{\mathrm{B}i}$ (m)
0	0,0	12,0	0,0	1,5	3,2	0	0
1	10,0	27,0	32,0	0,0	0,0	195±5	160±5
2	20,0	27,0	32,0	−1,8	−3,2	465±5	480±5
3	26,0	16,2	12,8	−1,8	−3,2	595±5	614±5

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{A3}} &= \left[s_{\mathrm{A0}} + v_{\mathrm{A0}}(t_1 - t_0) + \tfrac{1}{2}a_{\mathrm{A0}}(t_1 - t_0)^2\right] + v_{\mathrm{A1}}(t_2 - t_1) \\ &\quad + \left[v_{\mathrm{A2}}(t_3 - t_2) + \tfrac{1}{2}a_{\mathrm{A2}}(t_3 - t_2)^2\right] = (195 + 270 + 130)\,\mathrm{m} = 595\,\mathrm{m} \\ s_{\mathrm{B3}} &= \left[s_{\mathrm{B0}} + v_{\mathrm{B0}}(t_1 - t_0) + \tfrac{1}{2}a_{\mathrm{B0}}(t_1 - t_0)^2\right] + v_{\mathrm{B1}}(t_2 - t_1) \\ &\quad + \left[v_{\mathrm{B2}}(t_3 - t_2) + \tfrac{1}{2}a_{\mathrm{B2}}(t_3 - t_2)^2\right] = (160 + 320 + 134)\,\mathrm{m} = 614\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

joten koska $s_{\mathrm{B3}} > s_{\mathrm{A3}}$, niin auto B on edennyt pidemmän matkan ajanjakson 0...26 s aikana.

b) (**max 2p**) Hetki, jolla autot ovat seuraavan kerran rinnakkain, saadaan yhtälöstä

$$s_{\mathrm{A}}(t) = s_{\mathrm{B}}(t).$$

Ajanhetkellä t_1 $s_{\mathrm{A1}} > s_{\mathrm{B1}}$ ja ja ajanhetkellä t_2 $s_{\mathrm{A2}} < s_{\mathrm{B2}}$, joten autot kohtaavat aikavälillä $(t_1, t_2) = 10\ldots20$ s. Tällöin

$$s_{\mathrm{A1}} + v_{\mathrm{A1}} \cdot (t - t_1) = s_{\mathrm{B1}} + v_{\mathrm{B1}} \cdot (t - t_1),$$

josta saadaan ratkaistua aika

$$t = \frac{s_{\mathrm{A1}} - s_{\mathrm{B1}}}{v_{\mathrm{B1}} - v_{\mathrm{A1}}} + t_1 = \frac{195\,\mathrm{m} - 160\,\mathrm{m}}{32\,\mathrm{m/s} - 27\,\mathrm{m/s}} + 10\,\mathrm{s} = 17\,\mathrm{s}.$$

Virherajat 16 – 18 s.

a) **Tapa 2**: Auton A liikkeen kuvailu kuten edellä. Autojen kulkema matka on sama kuin kuvaajan pinta-ala. Lasketaan käyrien $v(t)$ ja vaaka-akselin väliin jäävät pinta-alat ja verrataan tuloksia keskenään.

b) **Tapa 2**: Autojen kulkema matka on sama kuin kuvaajan pinta-ala. Lasketaan käyrien $v(t)$ ja vaaka-akselin väliin jäävät pinta-alat siihen ajanhetkeen t asti, jolloin pinta-alat ovat samat (tai $A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}}$).

2 Pakettiauto, jonka massa on 2880 kg, kulkee vaakasuoraa tietä nopeudella 55 km/h, kun sen kuljettaja tekee äkkijarrutuksen, jossa pakettiauton pyörät lukkiutuvat. Jarrutusta jatketaan kunnes auto on pysähtynyt. Renkaiden ja tien välinen kitkakerroin on 0,50.
a) Laske pakettiauton jarrutusmatka. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.
b) Laske pakettiauton jarrutusmatka, jos auton tavaratila on täynnä, jolloin auton massa on 3930 kg. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.
c) Kumman pakettiauton, tyhjän vai täydessä lastissa olevan, jarrutusmatka on pidempi, jos huomioon otetaan myös liikettä vastustava ilmanvastus? Ilmanvastus on muotoa $F_i = Dv^2$, missä v on auton nopeus ja D on pelkästään auton muodosta riippuva vakio. Perustele.

Alkuarvot:

	A	B	C	D
v_0 (km/h)	55	59	63	67
v_0 (m/s)	15,28	16,39	17,50	18,61

a) (**max 3**) Kitkavoiman
$$F_\mu = \mu N = \mu mg$$
tekemä työ matkalla s on
$$W_\mu = \vec{F}_\mu \cdot \vec{s} = -F_\mu s = -\mu mg\, s.$$
Liike-energian muutos on ulkoisten voimien tekemä työ (tai $\Delta K = W_\mu$)
$$\Delta K = \left(0 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) = W_\mu = -\mu mgs,$$
josta saadaan ratkaistua matkalle lauseke
$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$
Oikeat vastaukset:

	s (m)	trk+1 (m)	−1% (m)	+1% (m)
A:	24	23,8	23,5	24,1
B:	27	27,4	27,1	27,7
C:	31	31,2	30,8	31,6
D:	35	35,3	34,9	35,7

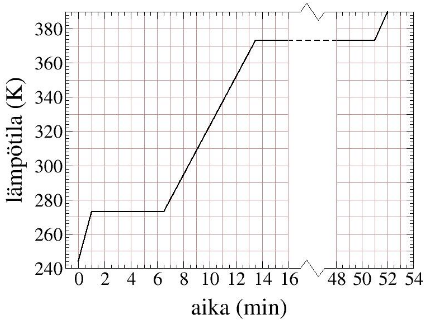
b) (**max 1**) Koska a-kohdan jarrutusmatka ei riipu massasta m, niin matka s on sama kuin a-kohdassa.

c) (**max 2p**) Ilmanvastus aiheuttaa liikettä vastustavan kitkavoiman F_i, jolloin liikettä vastustavan kokonaisvoiman suuruus on
$$F = \mu mg + Dv^2,$$
missä μ ja D ovat positiivisia vakioita. Newton II (dynamiikan peruslaki) antaa auton hidastuvuuden
$$a = \frac{F}{m} = \mu g + \frac{Dv^2}{m},$$
joka riippuu nyt massasta m. Mitä suurempi massa m sitä pienempi hidastuvuus ja siten sitä pidempi jarrutusmatka, kun alkunopeus v_0 on sama $\Rightarrow$ täydessä lastissa olevan auton jarrutusmatka on pidempi.

a) **Tapa 2:** Kitkavoima
$$F_\mu = \mu N = \mu mg.$$
Newton II (dynamiikan peruslaki):
$$a = \frac{F}{m} = -\frac{F_\mu}{m} = -\mu g.$$
Kiihtyvyys a on vakio, joten
$$\begin{cases} v(t) &= v_0 + at = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{v_0}{a} \\ s(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \overset{s_0=0}{=} -\frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \end{cases}$$

TKK, TTY, LTY, OY, ÅA, TY ja VY insinööriosastojen valintakuulustelujen fysiikan koe 1.6.2005, malliratkaisut.

3 Jääkappaletta, jonka massa on 0,100 kg ja lämpötila 244 K, aletaan lämmittää vakioteholla 100,0 W lämpöeristetyssä astiassa hetkellä $t = 0$ min. Kuvaan 2 on piirretty systeemin lämpötila ajan funktiona.
a) Tee selkoa, mitä tapahtuu kuvaajan eri vaiheissa.
b) Määritä kuvan 2 avulla veden ominaissulamislämpö ja ominaislämpökapasiteetti.



Kuva 2

a) (**max 3p**) Kuvaajan eri vaiheet:

0 . . . 1,0 min	jää lämpenee	(244 K → 273 K)
1,0 . . . 6,5 min	jää sulaa	(lämpötilassa 273 K)
6,5 . . . 13,5 min	vesi lämpenee	(273 K → 373 K)
13,5 . . . 51,0 min	vesi höyrystyy	(lämpötilassa 373 K)
51,0 . . . min	höyry lämpenee	(373 K →)

b) (**max 3p**) Veden ominaissulamislämpö L_s saadaan sulatukseen käytetyn lämpömäärän Q ja lämmitystehon P avulla

$$Q = L_s m = P\Delta t \quad \Rightarrow \quad L_s = \frac{P\Delta t}{m}$$

Kuvasta saadaan $\Delta t = (6{,}5 - 1{,}0)$ min $= 5{,}5$ min $= 330$ s, jolloin veden ominaissulamislämpö

$$L_s = \frac{100{,}0\,\mathrm{J/s} \cdot 330\,\mathrm{s}}{0{,}100\,\mathrm{kg}} = 330\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}.$$

Virherajat 300 – 360 kJ/kg.

Veden ominaislämpökapasiteetti c_v saadaan lämmitykseen käytetyn lämpömäärän Q ja lämmitystehon P avulla

$$Q = c_\mathrm{v} m\Delta T = P\Delta t \quad \Rightarrow \quad c_\mathrm{v} = \frac{P}{m(\Delta T/\Delta t)},$$

jossa tarvitaan kuvaajan $T(t)$ fysikaalinen kulmakerroin dT/dt, joka saadaan määrättyä kuvaajasta. Kuvaajasta lämpötilan muutos $\Delta T = 373\,\mathrm{K} - 273\,\mathrm{K} = 100\,\mathrm{K}$ ja vastaava ajanjakso $\Delta t = (13{,}5 - 6{,}5) \cdot 60\,\mathrm{s} = 420\,\mathrm{s}$, jolloin

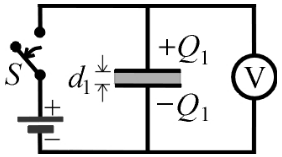
$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{100\,\mathrm{K}}{420\,\mathrm{s}} = 0{,}238\,\mathrm{K/s}.$$

Tällöin veden ominaislämpökapasiteetti on

$$c_\mathrm{v} = \frac{100{,}0\,\mathrm{J/s}}{0{,}100\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}238\,\mathrm{K/s}} = 4{,}2\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg{\cdot}K}}$$

Virherajat 3,9 – 4,5 kJ/(kg· K).

4 Levykondensaattorin levyjen välissä on tuntematonta eristeainetta, jonka suhteellinen permittiivisyys on ε_r. Levyjen pinta-ala $A = 10{,}0\ \mathrm{cm}^2$ ja välimatka $d_1 = 1{,}00$ mm. Kondensaattoriin tuodaan varaus Q_1, minkä jälkeen kytkin S avataan (kuva 3). Tällöin jännitemittarin lukema on U_1. Tämän jälkeen levyjen välissä oleva eristekerros poistetaan.



Kuva 3

a) Miten kondensaattorin kapasitanssi, varaus ja levyjen välinen jännite muuttuvat, kun eristekerros poistetaan? Perustele.
b) Levyjen välimatkaa muutetaan siten, että jännitemittarin lukema saadaan samaksi kuin lukema U_1 eristekerroksen kanssa. Tällöin levyjen välimatkaksi mitataan $d_2 = 0{,}46$ mm. Laske eristekerroksen suhteellinen permittiivisyys ε_r.

Alkuarvot:

	d_1 (mm)	d_2 (mm)
A:	1,00	0,46
B:	1,50	0,46
C:	1,00	0,23
D:	1,50	0,23

a) (**max 3p**) Kun kytkin S on auki eristekerrosta poistettaessa, varaus säilyy, joten levyjen varaus ei muutu (tai $Q_2 = Q_1$).

Levykondensaattorin kapasitanssi on $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/d$. Eristekerros pienentää sähkökenttää levyjen välissä

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{Cd} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A} \quad < \quad E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A},$$

joten $\varepsilon_r > 1$. Tällöin kapasitanssi pienenee

$$\left.\begin{array}{lcl} C_1 & = & \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \\ C_2 & = & \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \end{array}\right\} \overset{\varepsilon_r > 1}{\Longrightarrow} \quad C_2 < C_1$$

Vastaavasti jännite kasvaa

$$\left.\begin{array}{lcl} U_1 & = & \frac{Q_1}{C_1} \\ U_2 & = & \frac{Q_2}{C_2} \overset{Q_2 = Q_1}{=} \frac{Q_1}{C_2} \end{array}\right\} \overset{C_2 < C_1}{\Longrightarrow} \quad U_2 > U_1$$

b) (**max 3p**) Levyjen välimatkaa muutetaan $d_1 \rightarrow d_2$ siten, että jännite $U_2 = U_1$. Koska varaus säilyy (tai $Q_2 = Q_1$), niin

$$C_2 = \frac{Q_2}{U_2} = \frac{Q_1}{U_1} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} = \varepsilon_0 \frac{A}{d_2},$$

josta

$$\varepsilon_r = \frac{d_1}{d_2}.$$

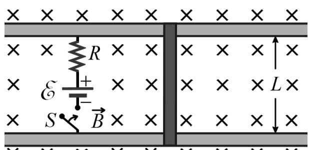
Oikeat vastaukset:

	ε_r (–)	trk+1 (–)	–1% (–)	+1% (–)
A:	2,2	2,17	2,14	2,20
B:	3,3	3,26	3,22	3,30
C:	4,3	4,35	4,30	4,40
D:	6,5	6,52	6,45	6,59

5 Metallitanko, jonka massa $m = 0{,}20$ kg, on johtavilla kiskoilla, jotka ovat etäisyydellä $L = 0{,}25$ m toisistaan (kuva 4). Tanko pääsee liikkumaan kitkattomasti kiskojen suuntaisesti. Homogeeninen magneettikenttä, jonka magneettivuon tiheys $B = 1{,}4$ T, on kohtisuorassa tehtäväpaperin tasoon nähden ja suuntautunut tehtäväpaperin sisään. Kiskojen välille on kytketty tasajännitelähde, jonka lähdejännite $\mathcal{E} = 12{,}0$ V, ja suljetun piirin kokonaisresistanssi $R = 5{,}0\ \Omega$. Kiskojen resistanssi oletetaan mitättömäksi. Kytkin S suljetaan hetkellä $t = 0$ s.

a) Laske tangon kiihtyvyys (suuruus ja suunta) heti katkaisimen sulkemisen jälkeen. Perustele.

b) Perustele, miksi tangon nopeus lähestyy vakioarvoa pitkän ajan kuluttua katkaisimen sulkemisesta. Kuinka suuri on nopeuden vakioarvo?



Kuva 4

Alkuarvot:

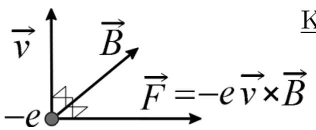
	A	B	C	D
L (m)	0,25	0,25	0,35	0,35
B (T)	1,4	1,7	1,5	2,0

a) (**max 3p**) Kun virta $I = \mathcal{E}/R$ alkaa katkaisimen sulkemisen jälkeen kiertää piirissä myötäpäivää eli tangossa alaspäin, niin metallitangon varauksenkuljettajat, elektronit, liikkuvat tangossa ylöspäin. Liikkuviin elektroneihin, ja siten tankoon, kohdistuva magneettikentästä aiheutuva voima on

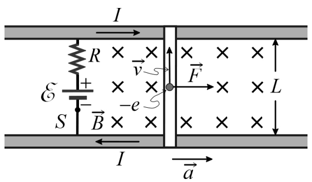
$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B},$$

jonka suunta määräytyy ristitulon mukaan (Kuva 4 (a)), joten voiman suunta ja siten tangon kiihtyvyyden suunta on kuvassa 4 (b) oikealle.

Kuva 4 (a)



Kuva 4 (b)



Voiman suuruus voidaan esittää virran I avulla: $F = qvB = I\Delta t \frac{L}{\Delta t} B = ILB$. Tällöin Newton II (dynamiikan peruslaki) antaa

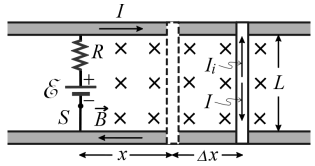
$$a = \frac{F}{m} = \frac{ILB}{m} = \frac{\mathcal{E}LB}{Rm}$$

Oikeat vastaukset:

	a (m/s^2)	trk+1 (m/s^2)	–1% (m/s^2)	+1% (m/s^2)
A:	4,2	4,20	4,15	4,25
B:	5,1	5,10	5,04	5,16
C:	6,3	6,30	6,23	6,37
D:	8,4	8,40	8,31	8,49

b) (**max 3p**)

Kuva 4 (c)



Kun tanko liikkuu kuvassa 4 (c) oikealle, magneettivuo

$$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B} = L(x + \Delta x)B$$

muuttuu suljetun silmukan läpi, jolloin silmukkaan indusoituu jännite

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -LB\frac{\Delta x}{\Delta t} = -LBv$$

ja induktiovirta

$$I_i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{LBv}{R},$$

joka Lenzin lain mukaan kiertää piirissä siten, että I_i pienentää virtaa I. Tasapainossa $\sum I = 0$ (tai $\sum F = 0$), joten pitkän ajan kuluttua katkaisimen sulkemisesta tangon nopeus saavuttaa vakioarvon. Tällöin

$$\frac{LBv}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} \qquad \left(\text{tai } \frac{LBv}{R}LB = \frac{\mathcal{E}LB}{R}\right)$$

josta saadaan ratkaistua nopeus

$$v = \frac{\mathcal{E}}{LB}.$$

Oikeat vastaukset:

	v (m/s)	trk+1 (m/s)	–1% (m/s)	+1% (m/s)
A:	34	34,3	33,9	34,7
B:	28	28,2	27,9	28,5
C:	23	22,9	22,6	23,2
D:	17	17,1	16,9	17,3

6 Arkeologisten eloperäisten näytteiden iän määrittämisessä käytetään yleisesti ns. hiili-14 menetelmää, missä $^{14}_{6}\mathrm{C}$ hajoaa β-hajonnalla.
a) Kirjoita $^{14}_{6}\mathrm{C}$ isotoopin hajoamisreaktio.
b) Arkeologisesta näytteestä, joka sisältää 440,0 mg hiiltä, rekisteröidään 155 hajoamisreaktiota tunnissa. Määritä näytteen ikä, jos oletetaan, että ilmakehän hiilen aktiivisuus näytteen syntyhetkellä oli 0,255 Bq hiiligrammaa kohti.

Alkuarvot:

	A	B	C	D
m (mg)	440,0	420,0	400,0	380,0
A (1/h)	155	118	155	118

a) (**max 3p**)

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \;\rightarrow\; ^{14}_{7}\mathrm{N} + e^{-} + \bar{\nu}$$

b) (**max 3p**) Näytteen aktiivisuus A pienenee eksponenttiaalisesti ajan t funktiona (hajoamislaki)

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

missä A_0 on näytteen aktiivisuus syntyhetkellään ja hajoamisvakio λ saadaan puoliintumisajasta

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Halutaan tietää ajanhetki t, jolloin näytteen aktiivisuus on pudonnut arvoon A:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{A}{A_0} = \ln e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{A}{A_0},$$

josta edelleen

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{A_0}{A}.$$

Näytteen aktiivisuus on A ja syntyhetkellä aktiivisuus A_0 on 0,255 1/s hiiligrammaa kohden, joten

$$A_0 = 0{,}255\,\frac{1}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{g}}\cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}}\cdot m = 918\,\frac{1}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{g}}\cdot m.$$

(tai $A_0 \to 0{,}255$ 1/(s·g) ja $A \to A/(3600\cdot m)$ 1/(s·g)).

<u>Oikeat vastaukset</u>:

	t (a)	trk+1 (a)	−1% (a)	+1% (a)
A:	7920	7918	7838	7998
B:	9790	9788	9688	9888
C:	7130	7130	7050	7210
D:	8960	8960	8870	9050

b) **Tapa 2**: Hajoamislaki voidaan esittää myös muodossa

$$A(t) = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} = A_0\,2^{-t/T_{1/2}}.$$

Ajanhetki t saadaan ratkaistua

$$A = A_0\,2^{-t/T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{A}{A_0} = \ln 2^{-t/T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{A}{A_0} = -\frac{t}{T_{1/2}}\ln 2,$$

josta edelleen

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{A_0}{A}.$$