

**Tehtävä 1.** Rakennusyhtiö Keskipitkä Oy ostaa kiinteistön kaupungin keskustasta. Kauppa rahoitetaan myymällä yhtiön omistamia kiinteistöjä kaupungin reuna-alueilla sekä hankkimalla lainaa. Ennen ostoa yhtiö tahtoo kuitenkin maksaa kokonaan aiemmin ottamansa korkeakorkoisen lainan, ja siksi rahoitusta hankitaan yli ostohinnan. Kuinka paljon Keskipitkä Oy maksaa keskustan kiinteistöstä, kun hinta muodostuu seuraavasti:

- Yhtiön saama laina on 60 % ostettavan kiinteistön hinnasta.
- Yhtiö saa myytävistä kiinteistöistä hinnan, joka on 50 % ostettavan kiinteistön hinnasta ja
- Yhtiö maksaa myymiensä kiinteistöjen myyntituloista aiemman 0,8 miljoonan euron lainan kokonaan pois ennen keskustakiinteistön ostoa.

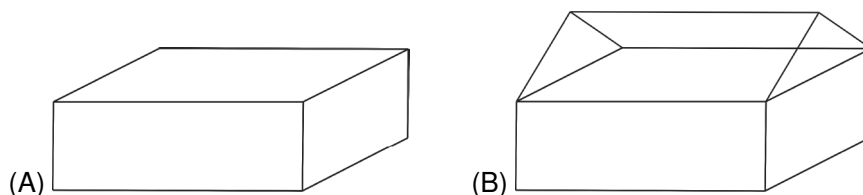
Mallivastaus: Jos  $x$  on ostohinta, on lainan määrä  $0,6x$  ja myynnistä saatavien tulojen määrä  $0,5x$ . Vanhojen lainojen maksuun menee  $0,8$  M€, joten

$$x = 0,6x + 0,5x - 0,8.$$

Tästä yhtälöstä ratkaisemalla  $x = 8$  (M€).

**Tehtävä 2.** Asunto-osakeyhtiö Kummituksen hallinnoimassa talossa on tasakatto, jonka mitat ovat  $30 \text{ m} \times 20 \text{ m}$  (kuva A). Yhtiö päättää rakentaa tasakaton päälle harjakattoisen ullakkohuoneiston, jonka harjan pituus on  $30 \text{ m}$  (kuva B).

Kaupungin julkisivulautakunta ei anna lupaa sivuseinien korottamiseen, joten harjakatto on rakennettava suoraan tasakaton päälle.



Ullakkohuoneisto halutaan rakentaa niin, että sen osan pinta-ala, jossa korkeus on vähintään  $2 \text{ m}$ , on  $300 \text{ m}^2$ . Kuinka suuri harjan korkeus  $h$  tähän vaaditaan?

Mallivastaus: Olkoon  $h$  harjan korkeus ja  $x$  matka reunalta keskipisteeseen (KUVA TULOSSA). Pintaalavaatimuksen mukaan pitää olla  $2(10 - x) \cdot 30 = 300$ , josta  $x = 5$ . Korkeus saadaan yhdenmuotoisten kolmioiden avulla:  $\frac{2}{5} = \frac{h}{10}$ , josta  $h = 4$ .

**Tehtävä 3.** Kheopsin pyramidin pohja on neliö jonka sivu on likimain  $230 \text{ m}$ . Pyramidin korkeus oli alunperin noin  $147 \text{ m}$ . Pyramidin otaksutaan rakennetun suorakulmaisista lohkareista, joiden mitat ovat keskimäärin  $127 \times 127 \times 71 \text{ cm}^3$ .

Esitä arvio pyramidin rakentamiseen tarvittujen lohkareiden lukumäärälle. Pyramidin sisällä olevien kammioiden tilavuutta eikä sivujen epätasaisuutta huomioida.

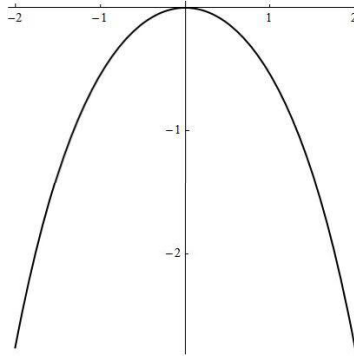
Ohje: Pyramidin tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja korkeuden tulosta.

Mallivastaus: Pyramidin tilavuus on  $\frac{1}{3} \cdot 140 \cdot 230 \cdot 230 \text{ m}^3 = 2592100 \text{ m}^3$ . Lohkareen keskimääräinen tilavuus on  $1,27 \cdot 1,27 \cdot 0,71 \text{ m}^3 = 1,14516 \text{ m}^3$ , joten lohkareita on tarvittu

$$\frac{2592100 \text{ m}^3}{1,14516 \text{ m}^3} = 2263528,47 \dots$$

siis noin 2,3 miljoonaa.

**Tehtävä 4.** Eero Saarisen suunnittelema muistomerkki Gateway Arch St. Louisissa on noin 192 metrin korkeuteen kohoava kaari, joka on muodoltaan likimain ns. ylösalaisen *ketjukäyrän*  $y = 1 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  muotoinen, kun määrittelyväliksi valitaan  $x \in [-2, 2]$ .



Lujuuslaskelmien kannalta on tärkeää selvittää missä määrin monumentin paino tukipisteissä  $x = -2$  ja  $x = 2$  jakautuu sivuille suuntautuviin komponentteihin. Sivusuuntaiset komponentit voidaan selvittää mikäli tiedetään käyrän tangentin suunta tukipisteissä.

Selvitä käyrän tangentin kulmakerroin ja sitä vastaava käyrän nousukulma pisteessä  $x = -2$ .

Mallivastaus: Tangentin kulmakerroin käyrän kussakin pisteessä saadaan laskemalla

$$y'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

ja pisteessä  $x = -2$  on  $y'(-2) = -\frac{1}{2}(e^{-2} - e^2) = 3,62686 \dots$

Saatu tulos merkitsee sitä, että pisteessä  $x = -2$  monumentti kohoaa ylöspäin kulmassa  $\alpha = \arctan(3,62686 \dots) = 1.30176$  (n. 74,6 astetta)