Matematiikka | Tehtävä 1.

Matematik | Uppgift 1.

Mathematics | Question 1.

Mallivastaus:

a) $\pi x + 3 = \sqrt{2} + 4x \Leftrightarrow (\pi - 4)x = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\pi - 4}$.

b) $(x - 2)(x - 3) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 5\}$.

c) Polynomin $x^2 - 4$ nollakohdat ovat ± 2. Toisen asteen kertoimen perusteella polynomin kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolloin $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ tai $x > 2$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(3n + 2) = (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + (3 \cdot 4 + 2) = 38$.

e) $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (-3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -7$.

f) Merkitään $x = \cos t$ ja $y = \sin t$. On etsittävä yksikköympyrältä $x^2 + y^2 = 1$ pisteet joille $x = y$. Sijoittamalla $y = x$ saadaan $2x^2 = 1$, josta $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Välillä $[0, 2\pi]$ näitä vastaavat kulmat $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

Modellsvar:

a) $\pi x + 3 = \sqrt{2} + 4x \Leftrightarrow (\pi - 4)x = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\pi - 4}$.

b) $(x - 2)(x - 3) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 5\}$.

c) Nollställena till polynomet $x^2 - 4$ är ± 2. Utgående från koefficienten för andra gradens termen är polynomets graf en parabel som öppnas uppåt, varvid $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ eller $x > 2$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(3n + 2) = (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + (3 \cdot 4 + 2) = 38$.

e) $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (-3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -7$.

f) Vi betecknar $x = \cos t$ och $y = \sin t$. Då gäller det att hitta punkterna på enhetscirklen $x^2 + y^2 = 1$ för vilka $x = y$. Genom att insätta $y = x$ fås $2x^2 = 1$, varvid $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Inom intervallet $[0, 2\pi]$ är vinklarna som svarar mot dessa $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

Model response:

a) $\pi x + 3 = \sqrt{2} + 4x \Leftrightarrow (\pi - 4)x = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{\pi - 4}$.

b) $(x - 2)(x - 3) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 5\}$.

c) The zeros of the polynomial $x^2 - 4$ are ± 2. Based on the quadratic coefficient, the graph of the polynomial is an upward opening parabola, hence $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ or $x > 2$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(3n + 2) = (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + (3 \cdot 4 + 2) = 38$.

e) $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (-3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -7$.

f) Let $x = \cos t$ and $y = \sin t$. One should seek the unit circle $x^2 + y^2 = 1$ points satisfying $x = y$. Substitution $y = x$ gives $2x^2 = 1$, whence $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. In interval $[0, 2\pi]$ the corresponding angles are $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$.

Matematiikka | Tehtävä 2.

Matematik | Uppgift 2.

Mathematics | Question 2.

Mallivastaus:

a) Erinomaisen lomapäivän todennäköisyys saadaan tulosäännöllä: $0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,378$, prosentteina n. 38%.

Hyvän lomapäivän todennäköisyyttä laskettaessa huomataan, että tapaukset, joissa yksi ehto ei toteudu, mutta kaksi muuta toteutuvat ovat toisensa poissulkevat. Täten kokonaistodennäköisyys saadaan summana

$$0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,456,$$

prosentteina n. 46%.

b) Mallivastaus 1: Olkoon V rekan perävaunun tilavuus ja $V_K(t) = c_K t$ se tilavuus, jonka Kalle saa lastattua täyteen t minuutissa. Koska Kalle saa perävaunun täyteen 120 minuutissa, on $V = c_K \cdot 120$, siis $c_K = \frac{V}{120}$.

Olkoon lisäksi $V_T(t) = c_T t$ tilavuus, jonka Tomi saa lastattua t minuutissa. Koska Tomi ja Kalle yhteistyössä saavat kaksi perävaunua täyteen 144 minuutissa, on

$$V_K(144) + V_T(144) = 2V \Leftrightarrow \frac{V}{120} \cdot 144 + c_T \cdot 144 = 2V \Leftrightarrow c_T = \frac{V}{180}.$$

Näin ollen $V_T(t) = \frac{V}{180}t$, ja siis Tomi saa vaunun täyteen kun

$$V_T(t) = V \Leftrightarrow \frac{V}{180}t = V \Leftrightarrow t = 180.$$

Tomilta aikaa kuluisi siis 180 min = 3 h.

Mallivastaus 2: Kalle täyttää ensin oman rekkansa (120 minuuttia) ja siirtyy sitten auttamaan Tomia. Kun kokonaisaika on 144 min, niin Kalle käytti $24 = 144 - 120$ minuuttia Tomin rekan täyttämiseen. Toisaalta $\frac{24\,\text{min}}{120\,\text{min}} = \frac{1}{5}$ eli Kalle täytti $\frac{1}{5}$ Tomin rekasta ja Tomi $\frac{4}{5}$. Tomi käyttää siis $\frac{4}{5}$ rekan täyttämiseen 144 min, jolloin koko rekan täyttämiseen menee Tomilta $\frac{5}{4} \cdot 144\,\text{min} = 180\,\text{min} = 3\,\text{h}$.

Modellsvar:

a) Sannolikheten för en utmärkt semesterdag fås ur produktregeln: $0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,378$, uttryckt i procentenheter ca. 38%.

Då man beräknar sannolikheten för en hyfsad semesterdag noterar man att händelser, då ett villkor inte uppfylls medan de två andra uppfylls, utesluter varandra. Därmed fås den totala sannolikhteten som summan

$$0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,456,$$

i procentenheter ca. 46%.

b) Modellsvar 1: Släpvagnens volym betecknas V och $V_K(t) = c_K t$ är den volym som Kalle fyller under tiden t minuter. Eftersom Kalle fyller sitt släp på 120 minuter är $V = c_K \cdot 120$, dvs. $c_K = \frac{V}{120}$.

Vidare betecknar $V_T(t) = c_T t$ volymen som Tomi fyller på t minuter. Eftersom Tomi och Kalle fyller två släp på 144 minuter är

$$V_K(144) + V_T(144) = 2V \Leftrightarrow \frac{V}{120} \cdot 144 + c_T \cdot 144 = 2V \Leftrightarrow c_T = \frac{V}{180}.$$

Därmed är $V_T(t) = \frac{V}{180}t$ och Tomi får således sitt släp fyllt då

$$V_T(t) = V \Leftrightarrow \frac{V}{180}t = V \Leftrightarrow t = 180.$$

För Tomi skulle det ta 180 min = 3 h.

Modellsvar 2: Kalle fyller först sin lastbil (120 minuter) och börjar sedan hjälpa Tomi. Eftersom totala tiden är 144 min så förbrukade Kalle $24 = 144 - 120$ minuter för att fylla Tomis släp. Å andra sidan är $\frac{24\,\text{min}}{120\,\text{min}} = \frac{1}{5}$ dvs. Kalle fyllde $\frac{1}{5}$ av Tomis släp och Tomi fyllde $\frac{4}{5}$. Tomi använder alltså 144 min för att fylla $\frac{4}{5}$ av lastbilens släp, varvid stuvandet av hela släpet tar $\frac{5}{4} \cdot 144\,\text{min} = 180$ min = 3 h för Tomi.

Model response:

a) The probability of an excellent day is given by the product rule: $0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.378$, as a percentage ca. 38%.

While calculating the probability of a good day, we notice that the cases where one condition is satisfied, but the others are not, are exclusive. Hence the total probability is obtained as a sum

$$0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.456,$$

as a percentage ca. 46%.

b) Model response 1: Let V be the truck volume and $V_K(t) = c_K t$ the volume Kalle can load in t minutes. Because Kalle can fully load the truck in 120 minutes, we have $V = c_K \cdot 120$, hence $c_K = \frac{V}{120}$.

Let also $V_T(t) = c_T t$ be the volume which Tomi can load in t minutes. Because Tomi and Kalle together can fully load two trucks in 144 minutes, we have

$$V_K(144) + V_T(144) = 2V \Leftrightarrow \frac{V}{120} \cdot 144 + c_T \cdot 144 = 2V \Leftrightarrow c_T = \frac{V}{180}.$$

Hence $V_T(t) = \frac{V}{180}t$, and Tomi can fully load the truck when

$$V_T(t) = V \Leftrightarrow \frac{V}{180}t = V \Leftrightarrow t = 180.$$

Tomi would hence spend 180 min = 3 h.

Model response 2: Kalle first fully loads his own truck (120 minutes) and then moves to assist Tomi. Since the total time is 144 min, Kalle spent $24 = 144 - 120$ minutes in assisting Tomi to load his truck.

On the other hand, $\frac{24\,\text{min}}{120\,\text{min}} = \frac{1}{5}$, meaning that Kalle loaded $\frac{1}{5}$ of Tomi's truck and Tomi loaded $\frac{4}{5}$. Hence Tomi spends 144 min to load $\frac{4}{5}$ of the truck, which means that to fully load the truck takes Tomi $\frac{5}{4} \cdot 144\,\text{min} = 180$ min = 3 h.

Matematiikka | Tehtävä 3.

Matematik | Uppgift 3.

Mathematics | Question 3.

Mallivastaukset:

a) $f(0) = 1 > 0$ ja $f(1) = \sin^2 1 - 2 + 1 = \sin^2 1 - 1 < 1 - 1 = 0$, joten funktion f jatkuvuuden perusteella välillä $[0, 1]$ on ainakin yksi nollakohta.

Koska $f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 < 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 = 0$, on f aidosti vähenevä eikä nollakohtia siksi voi olla useampia. Päättelyssä on huomioitu että yhtäsuuruus $2 \sin x \cos x = 2$ tulisi kyseeseen vain, jos jollekin x:n arvolle $\sin x = \cos x = 1$, mikä on mahdotonta.

b) Mallivastaus 1: Funktio $|x|$ on parillinen, joten

$$\int_{-2}^{-1} |x|\, dx = \int_{1}^{2} |x|\, dx.$$

Toisaalta funktio x^3 on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$, joten

$$\int_{-2}^{-1} x^3\, dx < 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_{1}^{2} x^3\, dx > 0.$$

Voidaan siis päätellä, että jälkimmäinen integraali on suurempi.

Mallivastaus 2: Suoraan laskemalla saadaan

$$\int_{-2}^{-1} (|x| + x^3)\, dx = \int_{-2}^{-1} (-x + x^3)\, dx = \Big/_{-2}^{-1} (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = -\frac{9}{4}$$

ja

$$\int_{1}^{2} (|x| + x^3)\, dx = \int_{1}^{2} (x + x^3)\, dx = \Big/_{1}^{2} (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = \frac{21}{4},$$

joten jälkimmäinen integraali on suurempi.

Modellsvar:

a) $f(0) = 1 > 0$ och $f(1) = \sin^2 1 - 2 + 1 = \sin^2 1 - 1 < 1 - 1 = 0$. Pga att funktionen f är kontinuerlig finns det därmed minst ett nollställe inom intervallet $[0, 1]$.

Eftersom $f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 < 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 = 0$, är f strikt avtaganade och därför kan det inte finnas fler nollställen. I resonemanget har man noterat att likheten $2 \sin x \cos x = 2$ kan gälla bara ifall det för något x värde gäller att $\sin x = \cos x = 1$, vilket är omöjligt.

b) Modellsvar 1: Funktionen $|x|$ är jämn och således är

$$\int_{-2}^{-1} |x|\, dx = \int_{1}^{2} |x|\, dx.$$

Å andra sidan är funktionen x^3 negativ då $x < 0$ och positiv då $x > 0$, varmed

$$\int_{-2}^{-1} x^3\, dx < 0 \qquad \text{och} \qquad \int_{1}^{2} x^3\, dx > 0.$$

Vi kan alltså sluta oss till att den senare integralen är större.

Modellsvar 2: Genom en direkt beräkning fås

$$\int_{-2}^{-1} (|x| + x^3)\, dx = \int_{-2}^{-1} (-x + x^3)\, dx = \Big/_{-2}^{-1} (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = -\frac{9}{4}$$

och

$$\int_{1}^{2} (|x| + x^3)\, dx = \int_{1}^{2} (x + x^3)\, dx = \Big/_{1}^{2} (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = \frac{21}{4},$$

dvs. den senare integralen är större.

Model responses:

a) $f(0) = 1 > 0$ and $f(1) = \sin^2 1 - 2 + 1 = \sin^2 1 - 1 < 1 - 1 = 0$, and because of the continuity of function f, there is at least one zero in interval $[0, 1]$.

   Because $f'(x) = 2\sin x \cos x - 2 < 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 = 0$, f is strictly decreasing, and there cannot be more zeros. It has been noticed here that the equality $2\sin x \cos x = 2$ can hold only if $\sin x = \cos x = 1$ for some x, but this is impossible.

b) Model response 1: function $|x|$ is even. Hence

$$\int_{-2}^{-1} |x|\, dx = \int_{1}^{2} |x|\, dx.$$

   On the other hand, function x^3 is negative, when $x < 0$ and positive, when $x > 0$, so

$$\int_{-2}^{-1} x^3\, dx < 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_{1}^{2} x^3\, dx > 0.$$

   We can hence conclude that the latter integral is greater.

   Model response 2: By directly calculating,

$$\int_{-2}^{-1} (|x| + x^3)\, dx = \int_{-2}^{-1} (-x + x^3)\, dx = \Big/_{-2}^{-1} (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = -\frac{9}{4}$$

   and

$$\int_{1}^{2} (|x| + x^3)\, dx = \int_{1}^{2} (x + x^3)\, dx = \Big/_{1}^{2} (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = \frac{21}{4},$$

   Hence the latter integral is greater.