

# DI-urvalsprov 30.5.2023

## FRÅGOR

### ANVISNINGAR

Urvalsprovet består av fyra delar: matematik, fysik, kemi och problemlösning. Matematikdelen är obligatorisk för alla. Du ska besvara alla matematikuppgifter. Bland de valfria uppgifterna ska du besvara tre (3) uppgifter. Om du svarar på fler än tre alternativa uppgifter, kommer de tre uppgifter som ger minst poäng att beaktas i provets slutliga poäng.

Skriv alla svar i svarshäftet på svarspappret som hör till respektive fråga. Endast de svar som skrivits på svarspappren bedöms. Du kan ta med dig frågorna efter provet.

### FRÅGEHÄFTE

**Skriv inte svaren här.**



Motivera dina svar i varje matematikuppgift.

### Matematik | Uppgift 1.

Uppge dina svar med exakta värden.

- a) Lös ekvationen  $\pi x + 3 = \sqrt{2} + 4x$ . (1 p.)
- b) Lös ekvationen  $(x - 2)(x - 3) = 6$ . (1 p.)
- c) Lös olikheten  $x^2 - 4 > 0$ . (1 p.)
- d) Beräkna  $\sum_{n=1}^4 (3n + 2)$ . (1 p.)
- e) Räkna vektorernas  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  och  $\vec{w} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  punktprodukt. (1 p.)
- f) Vilka är lösningarna till ekvationen  $\cos t = \sin t$  då  $0 \leq t \leq 2\pi$ ? (1 p.)

### Matematik | Uppgift 2.

- a) En studerande hoppas att det är uppehållsväder under sin semesterdag (60 % sannolikhet), att hen kan träffa kompisar (70 % sannolikhet) och att hen inte försenar sig från tåget tillbaka (90 % sannolikhet). Händelserna är oberoende av varandra. Semesterdagen blir **utmärkt** om alla förhoppningar uppfylls och **hyfsad** om två förhoppningar uppfylls.

Med vilken sannolikhet blir semesterdagen utmärkt? Samt med vilken sannolikhet blir semesterdagen hyfsad? (2 p.)

- b) Långtradar-Kalle och hans son Tomi transporterar två lastbilslasthushållspapper till en beställare. Eftersom papperet är lätt stuvvar Kalle och Tomi lastbilarna så fulla som möjligt för hand. Lastbilarna är lika stora och den ena stuvarens arbete störs inte av den andres.

Tack vare sin mångåriga erfarenhet klarar Kalle av att lasta sin bil full på två timmar. Ifall de stuvvar båda bilarna tillsammans tar arbetet 144 minuter. Hur länge skulle det ta för Tomi ifall han stuvade sin last helt ensam? (4 p.)

### Matematik | Uppgift 3.

- a) Visa att funktionen  $f(x) = \sin^2 x - 2x + 1$  har exakt ett nollställe, då  $0 \leq x \leq 1$ . (3 p.)

- b) Jämför integralerna

$$\int_{-2}^{-1} (|x| + x^3) dx \quad \text{ja} \quad \int_1^2 (|x| + x^3) dx.$$

Är någon av dem större än den andra? Vilken i så fall? (3 p.)



**Fysik | Uppgift 1.**

Besvara deluppgifterna 1–4. Välj ett alternativ (A–D) i flervalstuppgifterna. Rätt svar: 1 p. Fel svar, inget svar eller flera valda alternativ: 0 p.

Den internationella rymdstationen (ISS) kretsar runt jorden längs en cirkelformad bana med konstant fart på höjden 420 km över jordytan. Jorden attraherar rymdstationen med en kraft på 3,8 MN. Stationens massa är 444000 kg. Jordens massa är  $5,97 \cdot 10^{24}$  kg, jordens radie 6371 km och gravitationskonstanten har värdet  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ .

1. Vilket av följande alternativ beskriver kraften med vilken rymdstationen verkar på jorden? (1 p.)
  - A. Kraftens absolutbelopp är noll, dvs. rymdstationen verkar inte på jorden med någon kraft.
  - B. Kraftens absolutbelopp är mindre än 3,8 MN, men inte noll.
  - C. Kraftens absolutbelopp är 3,8 MN.
  - D. Kraftens absolutbelopp är större än 3,8 MN.
2. Vilket av följande alternativ är rätt? Då ISS kretsar kring jorden (1 p.)
  - A. är dess acceleration noll.
  - B. är dess acceleration riktad mot jordens medelpunkt.
  - C. är dess acceleration riktad parallellt med hastigheten hos ISS.
  - D. är dess acceleration riktad i motsatt riktning mot hastigheten hos ISS.
3. Ombord på ISS upplever en astronaut sig vara tyngdlös. Vilket av följande påståenden beskriver bäst orsaken till det? (1 p.)
  - A. Tyngdkraften i rymden är försvinnande liten.
  - B. Astronauten faller hela tiden närmare jordens medelpunkt.
  - C. ISS verkar inte på astronauten med en stödkraft.
  - D. Massan har ingen betydelse i rymden.
4. Hur lång tid tar det för ISS att kretsa ett varv runt jorden? Motivera ditt svar. (3 p.)



**Fysik | Uppgift 2.**

Besvara deluppgifterna 1–4 utgående från det bifogade materialet. Välj ett alternativ (A–D) i flervalsuppgifterna. Rätt svar: 1 p. Fel svar, inget svar eller flera valda alternativ: 0 p.

I deluppgifterna 1 och 2 avses med "utnyttjbar energi" energi som produceras genom att excitera elektroner från valensbandet i kisel till ledningsbandet. Beakta inverkan bara av de två förlustmekanismerna som beskrivs i det bifogade materialet.

1. Av energiinnehållet i grönt ljus ( $\lambda = 550 \text{ nm}$ ) kan man utnyttja (1 p.)
  - A. cirka 0 %.
  - B. cirka 25 %.
  - C. cirka 50 %.
  - D. cirka 100 %.
2. I cellen absorberas mängden 1,0 J blått ljus och mängden 1,0 J rött ljus. Vilket av följande påståenden stämmer? (1 p.)
  - A. 1,0 J rött ljus producerar lika mycket utnyttjbar energi som 1,0 J blått ljus.
  - B. 1,0 J rött ljus producerar mer utnyttjbar energi än 1,0 J blått ljus.
  - C. 1,0 J rött ljus producerar mindre utnyttjbar energi än 1,0 J blått ljus.
  - D. På basen av den information som ges i uppgiften kan man inte sluta sig till vilket av påståendena A-C ovan stämmer.
3. Solcellen som beskrivs i det bifogade materialet kopplas i serie med en elektrisk anordning som förbrukar likström, enligt det som visas i figur 1. Spänningen som solpanelen producerar uppmäts till 44 V. Beroendet mellan spänning och ström i panelen ges i figur 2 och i kretsen verkar inga andra förlustmekanismer än effektförbrukningen i den elektriska anordningen. Med hur stor effekt förbrukar den elektriska anordningen energi? (1 p.)
  - A. 44 W
  - B. 110 W
  - C. 120 W
  - D. 160 W
4. Vi betraktar strömkretsen som beskrivs i figur 1, där solpanelen kopplats i serie med en elektrisk anordning som förbrukar likström. Anordningens resistans är  $10,0 \Omega$ . Beroendet mellan spänning och ström i panelen ges i figur 2 och kretsen uppvisar inga andra förlustmekanismer än effektförbrukningen i den elektriska anordningen. Med hur stor effekt förbrukar den elektriska anordningen energi? Ifall du utnyttjar materialets figur i motiveringen så kopiera den också till ditt svarspapper. (3 p.)





## Fysik | Uppgift 2. Bifogat material: En halvledarbaserad solpanels funktion

En solcell producerar elenergi direkt från solljus, som består av enskilda energipaket dvs. fotoner. Då cellens aktiva material absorberar en foton som träffat det kan den absorberade fotonens energi excitera en elektron till ett högre energitillstånd.

Det vanligaste aktiva materialet i kommersiellt bruk är enkristall kisel. Kisel är en halvledare. Således är det förbjudna energiområdet mellan valens- och ledningsbanden, dvs. energigapet ( $E_g$ ) ganska litet. Storleken 1,1 eV på energigapet i kisel motsvarar en foton vars våglängd  $\lambda \approx 1100$  nm. Elektronvolt är en energienhet:  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

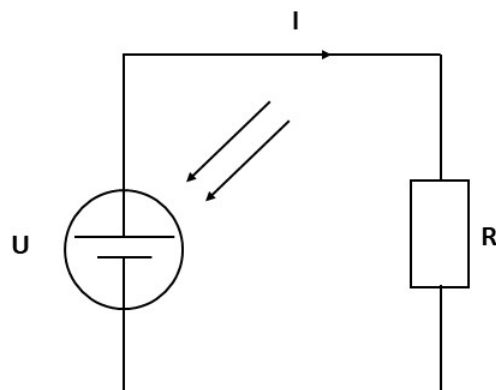
Då en foton med en energi som motsvarar minst energigapet träffar cellen kan en elektron exciteras från valensbandet till ledningsbandet. På detta vis åstadkommer man en spänning mellan cellens poler. Energigapet sätter samtidigt en övre gräns på den utnyttjbara energins belopp: ifall fotonens energi är större än energigapet, går den del av energin som överskrider energigapet till spillo.

Av dessa egenskaper följer två betydande förlustmekanismer:

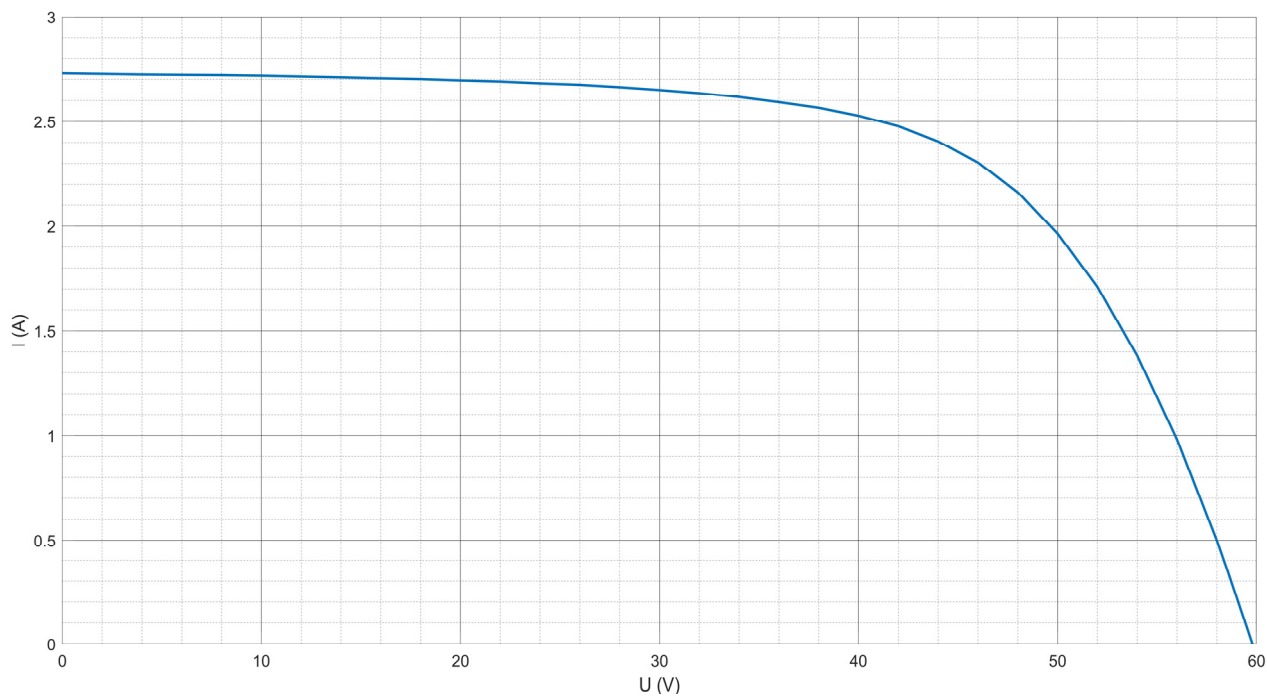
- De fotoner vars energi underskrider energigapets belopp kan inte utnyttjas alls.
- Av de fotoner vars energi överskrider energigapets belopp kan man utnyttja högst den andel som motsvarar energigapet medan den överskridande andelen går till spillo.

I verkligheten finns det många andra förlustmekanismer, men de två ovannämnda förorsakar ensamt en effektförlust på 50% i solceller som baseras på bara ett enda material. Det här beror på att det solljus som träffar jordytan har ett kontinuerligt spektrum av fotoner med olika våglängder: synligt ljus från rött (620 nm - 750 nm) till violett (380 nm - 450 nm), samt dessutom fotoner från det infraröda och ultraviolette området. Då man betraktar de ovannämnda förlustmekanismernas storlek för ljus av en viss våglängd har energin för fotonen som svarar mot ifrågavarande våglängd en central betydelse. Fotonens energi  $E$  och frekvens  $f$  kopplas direkt till varandra:  $E = hf$ , där  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  är Plancks konstant.

I praktiska solenergitillämpningar används solpaneler i vilka flera celler kopplats i serie för att höja spänningen. I figur 1 visas en krets där en solpanel kopplats i serie med en anordning som drivs med solenergi. Panelen producerar en spänning  $U$  och en ström  $I$  i den yttre strömkretsen och den eleffekt som produceras förbrukas i anordningen (ett motstånd vars resistans är  $R$ ). Tillverkaren av denna solpanel visar med en ström-spänningsmätning att under standardförhållanden (då ljusets intensitet är  $1000 \text{ W/m}^2$ , ljusets spektrum AM1.5G och panelens temperatur  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ ) beror strömmen och spänningen som panelen producerar av varandra enligt kurvan som visas i figur 2.



Figur 1. En elektronisk krets. Solpanelen producerar spänningen  $U$  och strömmen  $I$ . Anordningen som drivs med solenergi (resistansen  $R$ ) förbrukar å sin sida den producerade energin.



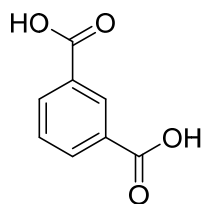
Figur 2. Förhållandet mellan producerad ström och spänning uppmätta under standardtestförhållanden för en solpanel framställda i ett  $(U, I)$  koordinatsystem.

## Kemi | Uppgift 1.

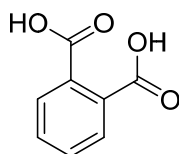
Besvara deluppgifterna 1–4. Välj ett alternativ (A–D) i flervalsuppgifterna. Rätt svar: 1 p. Fel svar, inget svar eller flera valda alternativ: 0 p.

Du kan använda det bifogade periodiska systemet som hjälp när du löser uppgifterna.

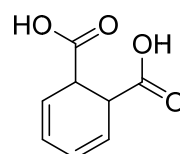
1. Vilket av följande påståenden är fel? (1 p.)
- A. Selen (Se,  $Z = 34$ ) uppnår ädelgasens elektronkonfiguration genom att ta emot två elektroner.
  - B. Rubidiumkationens (Rb,  $Z = 37$ ) laddning är  $1+$ .
  - C. Elektronegativiteten för fosfor (P,  $Z = 15$ ) är lägre än elektronegativiteten för svavel (S,  $Z = 16$ ).
  - D. Jodens (I,  $Z = 53$ ) valenselektroner finns i elektronskal 4.
2. Ftalsyra är en tvåvärd aromatisk karboxylsyra. Karboxylsyragrupperna är i *orto*-position d.v.s. de är bundna till bensenringens kolatomer 1 och 2. Vilken strukturformel (A-D) beskriver ftalsyra? (1 p.)



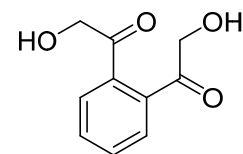
A



B

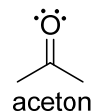


C



D

3. Vilket av följande påståenden är rätt? (1 p.)
- A. En vätebindning är en polär kovalent bindning mellan en väteatom och en atom med högre elektronegativitet än väte.
  - B. En vätebindning bildas mellan två sådana väteatomer, som är bundna till en atom med högre elektronegativitet än väte.
  - C. Det behövs alltid två molekyler för att en vätebindning kan bildas.
  - D. Det kan bildas vätebindningar mellan acetonmolekyler och vattenmolekyler.



4. Rita strukturformlerna för alla föreningar med molekylformeln  $C_4H_8$ . Konformationsisomerer behöver inte beaktas. (3 p.)



**Kemi | Uppgift 2.**

Besvara deluppgifterna 1–4 utgående från det bifogade materialet. Välj ett alternativ (A–D) i flervalstuppgifterna. Rätt svar: 1 p. Fel svar, inget svar eller flera valda alternativ: 0 p.

Du kan använda det bifogade periodiska systemet som hjälp när du löser uppgifterna.

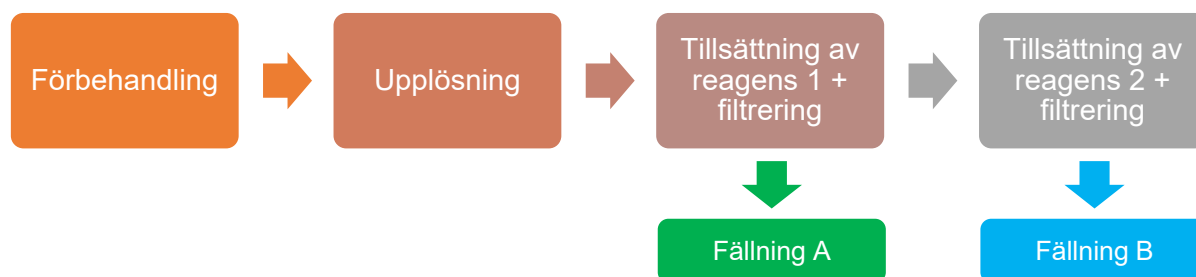
1. Fällning A i schema 1 är (1 p.)
  - A. Grafit
  - B. Kobolthydroxid
  - C. Litiumhydroxid
  - D. Natriumhydroxid
2. Studera reaktionen där litiumkoboltoxid löses upp i en svavelsyralösning som innehåller väteperoxid. Vilket av följande påståenden är rätt? (1 p.)
  - A. Kobolt reduceras och syre oxideras.
  - B. Litium oxideras och syre reduceras.
  - C. Litium och kobolt oxideras.
  - D. Kobolt och syre reduceras och litium oxideras.
3. Varför har det getts två  $pK_A$ -värden för oxalsyran i det bifogade materialet? (1 p.)
  - A. Eftersom oxalsyran kan fungera både som syra och reduktionsmedel.
  - B. Eftersom oxalsyran bildar ett vattenlösligt salt med litium och en fällning med kobolt.
  - C. Eftersom oxalsyran är en svag tvåvärd syra.
  - D. Eftersom oxalsyran är en stark tvåvärd syra.
4. Ett prov av litiumjonbatteriavfall behandlades enligt schema 1. Med denna metod kan 96 % av litium återvinnas. Hur många gram litiumkoboltoxid ( $M = 97,87$  g/mol) fanns i provet ursprungligen, ifall 7,54 gram litiumkarbonat ( $M = 73,89$  g/mol) fälldes ut? Upplösningen gjordes med en svavelsyralösning som innehåller väteperoxid. Motivera ditt svar. (3 p.)



## Kemi | Uppgift 2. Bifogat material: Återvinning av batterimetaller

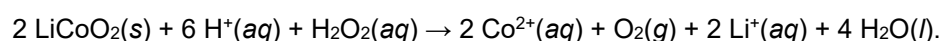
Europeiska kommissionen uppdaterar listan över kritiska råvaror (*critical raw materials*, CRM) med några års mellanrum. På listan finns flera metaller som är nödvändiga till exempel i hybrid- och elbilar, solpaneler och elektroniska produkter. I de allmänt använda litiumjonbatterierna är katodmaterialet typiskt litiumkoboltoxid ( $\text{LiCoO}_2$ ) medan grafit eller andra kolbaserade material ofta används som anodmaterial. De centrala komponenterna i litiumjonbatterierna (litium, kobolt och grafit) hittas på listan över kritiska råvaror. För att kunna försäkra tillgången till batterimetallerna i framtiden spelar återvinningen av batterimaterial därför en avgörande roll. Utmaningen ligger i det att batteriavfallet innehåller flera olika material och för att kunna återvinna de olika metallerna behövs en flerstegsprocess.

I schema 1 presenteras en förenklad process för behandling av använda litiumjonbatterier. Schemat beskriver speciellt återvinningen av litium och kobolt. Processen består av förbehandlings-, upplösnings- och separationsstegen. Grafit och övriga metaller förutom elektrodmaterialen separeras i förbehandlingssteget. Med upplösning menas i det här fallet behandlingen av katodmaterialet med en syralösning, varvid metallerna bildar vattenlösliga salter. Oorganiska syror som  $\text{H}_2\text{SO}_4$  ( $pK_{a1} = -2,8$ ;  $pK_{a2} = 1,99$ ) och  $\text{HCl}$  ( $pK_{a1} = -5,9$ ) är de vanligaste syrorna som används för detta ändamål. Vätekloridsyran ( $\text{HCl}$ ) är en utmärkt syra för upplösning av metaller men den giftiga klorgasen som bildas i reaktionen är problematisk på många olika sätt.



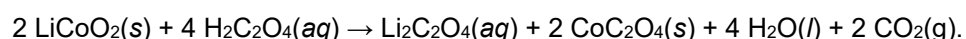
**Schema 1:** En förenklad process för återvinning av litium och kobolt.

När en svavelsyralösning används för upplösning av katodmaterial, tillsätts till reaktionsblandningen ofta väteperoxid ( $\text{H}_2\text{O}_2$ ), som fungerar som ett reduktionsmedel. Upplösningen av litiumkoboltoxid i en svavelsyralösning som innehåller väteperoxid kan beskrivas med reaktionslikheten nedan:



Eftersom både litium och kobolt löses upp i syralösningen, behövs olika metoder för separation och återvinning av dem. I processen, som beskrivs i schema 1, separeras kobolt och litium genom att fälla ut dem från lösningen. Lösningen som bildats i upplösningssteget görs först basisk (pH 11) genom tillsättning av  $\text{NaOH}$ -lösning, varvid kobolt fälls ut som kobolthydroxid ( $\text{Co}(\text{OH})_2$ ). Efter filtrering av fällningen tillsätts mättad  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ -lösning, varvid litium i sin tur fälls ut som litiumkarbonat ( $\text{Li}_2\text{CO}_3$ ).

I upplösning av katodmaterial kan även organiska syror så som oxalsyra ( $pK_{a1} = 2,27$ ;  $pK_{a2} = 4,28$ ) utnyttjas. Då kan helhetsreaktionen beskrivas med reaktionslikheten nedan:



Litiumoxalat som bildas i reaktionen är lösligt i syralösningen, medan koboltoxalat fälls ut från lösningen. I det här fallet har tillsatsen av väteperoxid inte observerats ha någon märkbar inverkan på upplösningförmågan, och oxalsyran kan då antas fungera som ett reduktionsmedel i reaktionen.

Ingendera av de ovan beskrivna metoderna är fullständigt optimal och det är uppenbart att återvinningsprocesserna kräver ännu mycket utvecklingsarbete. Även i det här fallet spelar starka kunskaper i kemi en nyckelroll.





Periodiska systemet

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	1 <b>H</b> 1,008																		2 <b>He</b> 4,003
2		4 <b>Be</b> 9,012														8 <b>O</b> 16,00	9 <b>F</b> 19,00		10 <b>Ne</b> 20,18
3		12 <b>Mg</b> 24,31														16 <b>S</b> 32,07	17 <b>Cl</b> 35,45		18 <b>Ar</b> 39,95
4		20 <b>Ca</b> 40,08	21 <b>Sc</b> 44,96	22 <b>Ti</b> 47,87	23 <b>V</b> 50,94	24 <b>Cr</b> 52,00	25 <b>Mn</b> 54,94	26 <b>Fe</b> 55,85	27 <b>Co</b> 58,93	28 <b>Ni</b> 58,69	29 <b>Cu</b> 63,55	30 <b>Zn</b> 65,38	31 <b>Ga</b> 69,72	32 <b>Ge</b> 72,63	33 <b>As</b> 74,92	34 <b>Se</b> 78,96	35 <b>Br</b> 79,90		36 <b>Kr</b> 83,80
5		38 <b>Sr</b> 87,62	39 <b>Y</b> 88,91	40 <b>Zr</b> 91,22	41 <b>Nb</b> 92,91	42 <b>Mo</b> 95,94	43 <b>Tc</b> (98)	44 <b>Ru</b> 101,07	45 <b>Rh</b> 102,91	46 <b>Pd</b> 106,42	47 <b>Ag</b> 107,87	48 <b>Cd</b> 112,41	49 <b>In</b> 114,82	50 <b>Sn</b> 118,71	51 <b>Sb</b> 121,76	52 <b>Te</b> 127,60	53 <b>I</b> 126,90		54 <b>Xe</b> 131,29
6		56 <b>Ba</b> 137,33	57-71	72 <b>Hf</b> 178,49	73 <b>Ta</b> 180,95	74 <b>W</b> 183,84	75 <b>Re</b> 186,21	76 <b>Os</b> 190,23	77 <b>Ir</b> 192,22	78 <b>Pt</b> 195,08	79 <b>Au</b> 196,97	80 <b>Hg</b> 200,59	81 <b>Tl</b> 204,38	82 <b>Pb</b> 207,2	83 <b>Bi</b> 208,98	84 <b>Po</b>		85 <b>At</b>	86 <b>Rn</b>
7		86 <b>Ra</b>	89-103	104 <b>Rf</b>	105 <b>Db</b>	106 <b>Sg</b>	107 <b>Bh</b>	108 <b>Hs</b>	109 <b>Mt</b>	110 <b>Ds</b>	111 <b>Rg</b>	112 <b>Cn</b>	113 <b>Nh</b>	114 <b>Fl</b>	115 <b>Mc</b>	116 <b>Lv</b>		117 <b>Ts</b>	118 <b>Og</b>

1 järjestyysluku  
kemiallinen merkki  
atomimassa

2 atomnummer / atomic number  
kemiskt tecken / chemical symbol  
atommassa / atomic mass

Lantanoidit/ Lantanoider/ Lanthanides	57 <b>La</b> 138,91	58 <b>Ce</b> 140,12	59 <b>Pr</b> 140,91	60 <b>Nd</b> 144,24	61 <b>Pm</b>	62 <b>Sm</b> 150,36	63 <b>Eu</b> 151,96	64 <b>Gd</b> 157,25	65 <b>Tb</b> 158,93	66 <b>Dy</b> 162,50	67 <b>Ho</b> 164,93	68 <b>Er</b> 167,26	69 <b>Tm</b> 168,93	70 <b>Yb</b> 173,05	71 <b>Lu</b> 174,97
Aktinoidit/ Aktinoider/ Actinides	89 <b>Ac</b>	90 <b>Th</b> 232,04	91 <b>Pa</b> 231,04	92 <b>U</b> 238,03	93 <b>Np</b>	94 <b>Pu</b>	95 <b>Am</b>	96 <b>Cm</b>	97 <b>Bk</b>	98 <b>Cf</b>	99 <b>Es</b>	100 <b>Fm</b>	101 <b>Md</b>	102 <b>No</b>	103 <b>Lr</b>



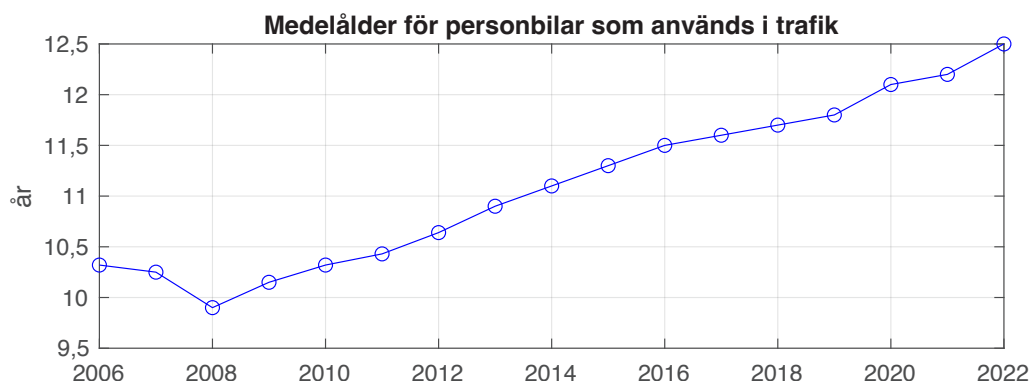
**Problemlösning | Uppgift 1.**

Nästa sida innehåller material om personbilsbeståndet i Finland och personbilarnas drivkraft. Besvara deluppgifterna 1–5 utgående endast från det bifogade materialet. Välj ett alternativ (A–D) i flervalstuppgifterna. Rätt svar: 1 p. Fel svar, inget svar eller flera valda alternativ: 0 p.

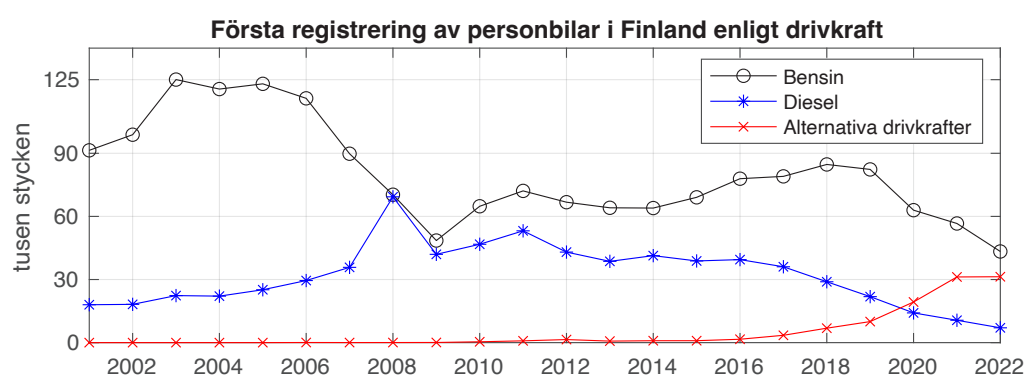
Det kan antas att personbilar med olika drivkraft körs ungefär lika mycket och att personbilars livslängd är ungefär lika, såvida det inte finns andra specifikationer i deluppgifterna. Endast kostnaderna för bränsleförbrukning eller elförbrukning, och eventuellt drivkraftsskatt, beaktas i körkostnaderna. Övriga kostnader såsom försäkringar, underhåll etc. ignoreras.

- Om utvecklingen fortsätter enligt det bifogade materialet, vad är den vanligaste drivkraften av personbilsbeståndet år 2027? (1 p.)
  - Bensin
  - Diesel
  - Alla alternativa drivkrafter sammanlagt
  - Kan inte härledas från det bifogade materialet.
- Om utvecklingen fortsätter enligt uppgifterna i det bifogade materialet och utsläppen från bränsleproduktionen också beaktas, vilken drivkraft kommer att orsaka mest CO<sub>2</sub>-utsläpp år 2029? (1 p.)
  - Bensin
  - Diesel
  - Alla alternativa drivkrafter sammanlagt
  - Kan inte härledas från det bifogade materialet.
- Vilket av följande påståenden är korrekt enligt det bifogade materialet? (1 p.)
  - Största delen av CO<sub>2</sub>-utsläppen i personbilsbeståndet genereras av dieslbilar.
  - Om genomsnittspriset på naturgas skulle vara 30 % högre, skulle det vara den dyraste drivkraften per körda 100 km för de mest sålda bilarna i segmentet, när drivkraftsskatten inte beaktas.
  - Om den årliga körsträckan för en elbil på 1 900 kg är 50 000 km, är andelen av drivkraftsskatten i den årliga körkostnaden (för en elbil) mindre än 35 %.
  - Inget av alternativen A–C.
- Hur mycket måste den årliga körsträckan minst vara så att kostnaden för att köra en naturgasbil med en totalvikt på 1950 kg är mindre än kostnaden för att köra en bensinbil, när drivkraftsskatten beaktas? Använd medelpriser och referensförbrukningar från det bifogade materialet. (1,5 p.)
- Låt inköpspriset för Tesla Model 3 vara 50 000 €, den totala massan 2150 kg och elförbrukningen 16,8 kWh / 100 km. Låt inköpspriset för bensindrivna Volkswagen Golf vara 30 000 €, den totala vikten 1750 kg och förbrukningen 5,3 l / 100 km. Det kan antas att de genomsnittliga priserna och skatterna som nämns i det bifogade materialet förblir konstanta under hela den betraktade perioden. Det kan antas att bilarna körs i genomsnitt 200 km per vecka. Hur många år måste en Tesla köras för att få tillbaka det dyrare inköpspriset i form av lägre körkostnader? Drivkraftsskatten måste beaktas i beräkningen. (1,5 p.)





Figur 1. Medelålder för personbilar som används i trafik.



Figur 2. Första registrering av personbilar i Finland enligt drivkraft.

Tabell 1. Jämförelsetabell över genomsnittliga drivkraftspriser, förbrukning och CO<sub>2</sub>-utsläpp av de mest sålda bilmodellerna.

Drivkraft	Medelpris 1.4.-30.6. 2022	Enhet	Mest sålt segment 2021	Segmentets mest sålda bilar 2021	Referensförbrukning	Enhet / 100 km	CO <sub>2</sub> -utsläpp, g/km <sup>3)</sup>
Bensin (E10)	2,35	EUR/l	C	Toyota Corolla, Skoda Octavia, Volkswagen Golf	5,3	l	113
Diesel (B7) <sup>1)</sup>	2,31	EUR/l		Skoda Octavia, Volkswagen Golf, Mercedes-Benz A-klass	5,5	l	134
Naturgas (CNG) <sup>1)</sup>	2,49	EUR/kg		Skoda Octavia, Volkswagen Golf, Skoda Scala	3,9	kg	106
Biogas (CNG) <sup>1)</sup>	1,95	EUR/kg		Skoda Octavia, Volkswagen Golf, Skoda Scala	3,9	kg	106
El (C) <sup>1)</sup>	24,2	cent/kWh <sup>2)</sup>		Tesla Model 3, Volkswagen ID.3, Nissan Leaf	16,8	kWh	0
<sup>1)</sup> Fordon som utnyttjar denna kraftkälla påförs drivkraftsskatt, vilket beror på bilens massa och bränsle.		<sup>2)</sup> Baserat på hushållens elpris, inklusive överföringsavgifter och skatter		<sup>3)</sup> Tar inte i beaktande utsläpp från bränsleproduktion. Enligt Fingrids och Gasums uppgifter är de beräknade CO <sub>2</sub> -utsläppen för en biogasbil 33,2 g/km och för elbil 16,9 g/km, med beaktande av produktionen och förlusterna av bränsle och el.			

Drivkraftskatten för personbilar för varje påbörjat 100 kilogram av bilens totalmassa:

- Diesel: 5,5 cent/dygn
- Naturgas och biogas: 3,1 cent/dygn
- El: 1,5 cent/dygn

Drivkraftskattens inverkan på körkostnaderna (€/100 km) beror på antalet körda kilometer varje år. Till exempel för en bil som används i trafik året runt och kör 17 000 km per år är kostnadseffekten cirka

- Diesel: 1,5–2,2 €/100 km
- Naturgas och biogas: 0,9–1,3 €/100 km
- El: 0,4–0,6 €/100 km

Materialet baseras på information från Transport- och kommunikationsverket

**FRÅGEHÄFTE | Skriv inte svaren här.**



**Problemlösning | Uppgift 2.**

Varje deluppgift 1–6 ger högst en poäng. *Ett Primtal* är ett heltal större än ett som inte kan uttryckas som en produkt av positiva heltal som är mindre än själva primtalet. Till exempel 6 är inte ett primtal eftersom  $6 = 2 \cdot 3$ , men 2, 3, 5 och 7 är primtal.

1. Välj bland alternativen nedan alla vars resultat är ett primtal. Om ditt svar innehåller exakt ett fel får du 0,5 poäng. Både att välja fel alternativ och att inte välja rätt alternativ är ett misstag.

- A.  $13 \cdot 1$     B.  $\frac{2 \cdot 2}{4}$     C.  $2 \cdot 7.5$     D.  $3 \cdot 5 + 2$

Matematiska system som kallas *kropp* används inom telekommunikation och kryptologi. Varje kropp har minst element 0 och 1, samt operationerna addition + och multiplikation  $\cdot$ . Tabellerna nedan visar beräkningarna av en kropp med element: 0, 1, 2 och 3. Till exempel  $1 + 3 = 2$ , eftersom i + -tabellen, i skärningspunkten för raden som motsvarar element 1 och kolumnen som motsvarar element 3 finns 2.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

2. Varje element utom 0 har *en invers*. Produkten av ett element och dess invers är 1. Vad är inversen av element 2 i exempelkroppen? Välj exakt ett alternativ. .

- A. 0    B. 1    C. 2    D. 3

För alla kropp förekommer dess varje element i additionstabellen (+) till höger om den vertikala linjen på varje rad och under den horisontella linjen i varje kolumn. I multiplikationstabellen ( $\cdot$ ) varje post på raden 0 och varje post i kolumnen 0 är 0, och varje element förekommer i alla återstående rader till höger om den lodräta linjen. För varje element i kroppen gäller  $a + 0 = 0 + a = a$  och  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ .

3. Rita multiplikationstabellen ( $\cdot$ ) för någon kropp med 3 element.

4. Rita additionstabellen (+) för någon kropp med 3 element.

5. För varje element  $a$ ,  $b$  och  $c$  i en kropp gäller  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ . Visa med hjälp av den information som ges i denna uppgift att det system som visas i tabellerna till höger inte är en kropp.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	1	0
3	3	2	0	1

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Det finns en kropp där det finns exakt  $n$  element om och endast om  $n$  antingen är ett primtal eller något primtal multiplicerat med sig själv ett antal gånger. Till exempel det finns en kropp med 4 element, eftersom  $4 = 2 \cdot 2$  och 2 är primtal. Det finns ingen kropp med 6 element, eftersom 6 varken är ett primtal eller en kvadrat, kub eller så vidare av något primtal.

6. Vad är det tredje minsta positiva heltalet så att det inte finns någon kropp med det antal element? Det vill säga, om storlekar större än noll, som är omöjliga för en kropp, ordnas i en kö från den minsta, vilket positivt heltal kommer då att vara på tredje plats i kön? Välj ett alternativ. Från denna delfråga kan du få 0 eller 0,5 eller 1 poäng.

- A. 6    B. 8    C. 9    D. 10    E. 12    F. 14





**wc**





