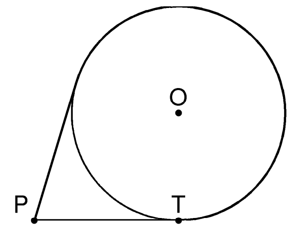
Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. **Liite:** Kaavakokoelma. **Apuvälineet:** Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

A1 Hihna on kiristetty kulkemaan pyörän ja ohuen tapin P ympäri. Etäisyys $|PT| = 8$ ja pyörän säde on 3.

(a) Mikä on pisteen P (lyhyin) etäisyys pyörästä?

(b) Kuinka pitkä hihna on (vähintään)?

Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella. Tapin dimensiot voidaan jättää huomiotta.



A2 Yritys hankkii 5000 kg raaka-ainetta, josta on vettä 5,40 %(painoprosenttia) ja väripigmenttiä 2,60 %. Ennen käyttöä raaka-aine on laimennettava siten, että lisäyksen jälkeen sekoituksesta 6,60 % on vettä.

(a) Miten paljon hankittuun raaka-aineeseen tulee lisätä vettä, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan?

(b) Miten paljon vettä ja väripigmenttiä tulee lisätä hankittuun raaka-aineeseen, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan, ja lisäksi väripigmentin suhteellinen osuus massasta säilyy alkuperäisenä 2,60 %:na?

Anna vastaukset sadan gramman tarkkuudella.

A3 Insinööri J. Partainen jäi eläkkeelle vuonna 2007 ja päätti käyttää 150 000 euroa hyväntekeväisyyteen. Kunakin vuonna, ensimmäisen kerran vuonna 2007, insinööri Partainen toimii seuraavasti: hän lahjoittaa ensin jäljellä olevasta pääomasta 13 % äskettäin tekniikasta väitelleelle sukulaiselleen. Tämän jälkeen hän lahjoittaa d euroa vanhan koulunsa stipendirahastoon.

(a) Kuinka suuri jäljellä oleva pääoma on juuri vuoden 2011 lahjoitusten vähentämisen jälkeen, jos $d = 1000$?

(b) Kuinka suuri voi d korkeintaan olla jotta lahjoitukset vuonna 2031 voitaisiin toteuttaa suunnitellusti?

Anna vastaukset sentin tarkkuudella. Voidaan olettaa, että pääomasta voidaan jakaa mielivaltaisia murto-osia.

A4 Näyteikkunan kahden lasin välisessä kapeassa raossa on kirppu. Kirppu hyppii ikkunan edestä katsoen joko oikealle 4 cm tai vasemmalle 8 cm. Hyppy oikealle tapahtuu todennäköisyydellä $p = 0{,}62$, ja hypyt ovat toisistaan riippumattomia. Ikkuna on 7 m leveä ja kirppu tarkastelun alussa sen alareunan keskipisteessä.

Millä todennäköisyydellä kirppu on

(a) 3 hypyn jälkeen takaisin alkuperäisessä paikassaan,

(b) 30 hypyn jälkeen takaisin alkuperäisessä paikassaan,

(c) 30 hypyn jälkeen täsmälleen metrin päässä alkuperäisestä paikastaan?

Anna todennäköisyydet tuhannesosan tarkkuudella.

A5 Tarkastellaan xy-tason pistejoukkoa $\{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$, missä kaikille positiivisille kokonaisluvuille k

$$P_k = (\cos(k\,35^\circ), \sin(k\,35^\circ)).$$

(a) Osoita, että jokainen joukon piste on erään säännöllisen 72-kulmion kärkipiste.

(b) Osoita, että joukossa on täsmälleen 72 eri xy-tason pistettä.

A6 Mitä arvoja integraali $\int_0^1 \left|x - kx^2\right|\,dx$ voi saada, kun $k \in \mathbb{R}$?

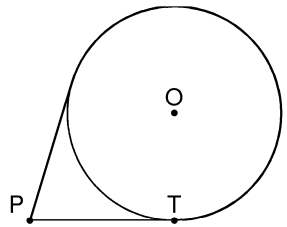
Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. **Liite:** Kaavakokoelma. **Apuvälineet:** Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

A1 En rem är spänd så den går runt ett hjul och en tunn tapp P , som man spänner remmen med. Avståndet $|PT| = 8$ och hjulets radie är 3.

(a) Vad är tappen P:s (kortaste) avstånd från hjulet?

(b) Hur lång är remmen (minst)?

Ge svaren med två decimalers noggrannhet. Bortse från tappens dimensioner.



A2 Ett företag skaffar 5000 kg råämne, som innehåller 5,40 % (viktprocent) vatten och 2,60 % färgpigment. Före användningen måste råämnet spädas ut så att det efter utspädningen finns 6,60 % vatten i blandningen.

(a) Hur mycket vatten skall tillsättas till råämnet, för att den önskade koncentrationen vatten skall uppnås?

(b) Hur mycket vatten och färgpigment skall tillsättas till råämnet, för att den önskade koncentrationen vatten skall uppnås och dessutom den urspungliga koncentrationen av färgpigment, 2,60 %, bibehålls?

Ge svaren med hundra grams noggrannhet.

A3 Ingenjören J. Partainen gick i pension år 2007 och bestämde sig för att använda 150 000 euro till välgörenhet. Varje år, med början år 2007, går ingenjör Partainen till väga på följande sätt: Först skänker han 13 % av det kvarstående kapitalet till någon släktning, som nyligen doktorerat i teknik. Därefter skänker han d euro till stipendiefonden vid sin gamla skola.

(a) Hur stort är det kvarstående kapitalet efter donationerna år 2011, om $d = 1000$?

(b) Hur stor får summan d högst vara, för att donationerna år 2031 skall kunna göras planenligt?

Ge svaren med en cents noggrannhet. Man kan anta att det kan skänkas godtyckliga bråkdelar ur kapitalet.

A4 I det tunna mellanrummet mellan två glasskivor i ett skyltfönster finns en loppa. Sett från utsidan hoppar loppan antingen 4 cm åt höger eller 8 cm åt vänster. Hopp åt höger sker med sannolikheten $p = 0{,}62$, och hoppen är oberoende av varandra. Fönstret är 7 m brett och i början av observationen är loppan i mitten av fönstrets undre kant.

Vad är sannolikheten att loppan är

(a) tillbaka i utgångsläget efter 3 hopp,

(b) tillbaka i utgångsläget efter 30 hopp,

(c) på exakt en meters avstånd från utgångsläget efter 30 hopp?

Ge sannolikheterna med en tusendels noggrannhet.

A5 Vi studerar punktmängden $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ i xy-planet, där för varje positivt heltal k

$$P_k = (\cos(k\,35°), \sin(k\,35°)).$$

(a) Visa att varje punkt i mängden är en hörnpunkt hos en viss regelbunden 72-hörning.

(b) Visa att det finns exakt 72 olika xy-planets punkter i mängden.

A6 Vilka värden kan integralen $\int_0^1 \left|x - kx^2\right| \, dx$ anta, då $k \in \mathbb{R}$?

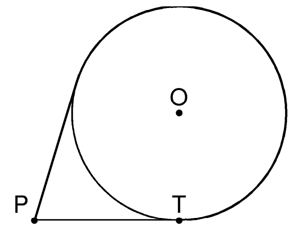
Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. **Liite:** Kaavakokoelma. **Apuvälineet:** Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

A1 A belt is tightened over a wheel and a thin rod P. The distance $|PT| = 8$ and the wheel's radius is 3.

(a) What is the (shortest) distance between the point P and the wheel?

(b) How long is the belt (at least)?

Give the answer with an accuracy of two decimals. The dimensions of the rod can be neglected.



A2 A company acquires 5000 kg raw material, wherein 5,40 %(mass concentration) is water and 2,60 %color pigment. Prior to use the raw material has to be diluted to contain 6,60 %of water.

(a) How much water should one add into the acquired raw-material to obtain the desired concentration of water?

(b) How much water and pigment should one add into the aquired raw-material to obtain the desired concentration of water and that, in addition, the concentration of pigment remains the original 2,60 %?

Give the answers with an accuracy of hundred grams.

A3 Engineer B. Rossa retired year 2007 and decided to use 150 000 euro for charity. Each year, first time year 2007, engineer Rossa acts as follows: first he bestows 13 % of the remaining capital to a relative of his that recently has received doctorate. After that he grants d euro for a fund at his former school.

(a) How large is the remaining capital just after donations year 2011 have been deducted, if $d = 1000$?

(b) How large can d be at most to allow the donations year 2031 be executed as planned?

Give the answers with an accuracy of one cent. One may assume the donations can be made in any fraction of the capital.

A4 In a narrow gap between two glass plates of a double glassed window there is a flea. As seen from outside, the flea jumps either 4 cm to the right or 8 cm to the left. The jump to the right takes place with the probability $p = 0{,}62$. The jumps are independent of each other. The window is 7 m wide and the flea is in the middle of the window at the beginning of the observation.

At what probability will the flea be

(a) back at the starting position after 3 jumps,

(b) back at the starting position after 30 jumps,

(c) at one meter distance from the starting position after 30 jumps?

Give the probabilities with an accuracy of one thousandth.

A5 Let us consider a set of points $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ in the xy-plane, where, for any positive integer k,

$$P_k = (\cos(k\,35°), \sin(k\,35°)).$$

(a) Show that each point in the set is a vertex of a regular 72-gon.

(b) Show that the set contains exactly 72 different points of the xy-plane.

A6 What values may the integral $\int_0^1 \left|x - kx^2\right| dx$ obtain for $k \in \mathbb{R}$?

Tehtävä 1

Merkitään $a = |PT|$ ja sädettä r. Olkoon kehän ja janan OP leikkauspiste Q.

a) Lyhyin etäisyys on $|PQ|$. Suorakulmaisesta kolmiosta PTO saamme $|OP| = \sqrt{a^2 + r^2}$ ja edelleen

$$|PQ| = |OP| - |OQ| = \sqrt{a^2 + r^2} - r.$$

b) Tilanne on symmetrinen akselin OP suhteen. Merkitään $\alpha = \measuredangle POT$,

$$\tan \alpha = a/r.$$

Hihnan kehällä olevaa osuutta vastaa keskuskulma $2\pi - 2\alpha$. Hihnan kokonaispituus on siis

$$l = 2(\pi - \alpha)r + 2a.$$

A	B	C	D
$a = 8$	$a = 7$	$a = 5$	$a = 7$
$r = 3$	$r = 3$	$r = 3$	$r = 4$
$\lvert PQ\rvert = \sqrt{73} - 3$	$\lvert PQ\rvert = \sqrt{58} - 3$	$\lvert PQ\rvert = \sqrt{34} - 3$	$\lvert PQ\rvert = \sqrt{65} - 4$
$= 5{,}54400\ldots$	$= 4{,}61577\ldots$	$= 2{,}83095\ldots$	$= 4{,}06226\ldots$
$\approx 5{,}54$	$\approx 4{,}62$	$\approx 2{,}83$	$\approx 4{,}06$
$\tan \alpha = 8/3$	$\tan \alpha = 7/3$	$\tan \alpha = 5/3$	$\tan \alpha = 7/4$
$\alpha \approx 1{,}21203$	$\alpha \approx 1{,}16590$	$\alpha \approx 1{,}03038$	$\alpha \approx 1{,}05165$
$\approx 69{,}4440°$	$\approx 66{,}8014°$	$\approx 59{,}0362°$	$\approx 60{,}2551°$
$2\alpha r \approx 7{,}27215$	$2\alpha r \approx 6{,}99543$	$2\alpha r \approx 6{,}18226$	$2\alpha r \approx 8{,}41320$
$l = 27{,}57740\ldots$	$l = 25{,}85413\ldots$	$l = 22{,}66729\ldots$	$l = 30{,}71954\ldots$
$\approx 27{,}58$	$\approx 25{,}85$	$\approx 22{,}67$	$\approx 30{,}72$

Tehtävä 2

Merkitään kokonaismassaa alkutilanteessa m_0 ja lopputilanteessa m_1, vastaavasti veden osuutta v_0 ja v_1, ja värin osuutta p_0 ja p_1. Merkitään tuntematonta värin lisäystä y ja veden x.

a) Pigmenttiä ei lisätä: $y = 0$. Tällöin saamme kokonaismassaksi $m_1 = m_0 + x$, veden massaksi $v_1 m_1 = v_0 m_0 + x$. Sijoitetaan m_1

$$\Rightarrow v_1(m_0 + x) = v_0 m_0 + x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{v_0 - v_1}{v_1 - 1} m_0.$$

b) Lisätään vettä x ja pigmenttiä y, jolloin kokonaismassaksi tulee $m_1 = m_0 + x + y$. Vaaditaan massoille

$$\begin{cases} v_1 m_1 = v_0 m_0 + x \\ p_1 m_1 = p_0 m_0 + y \end{cases}$$

ja pigmentin konsentraatiolle $p_0 = p_1$. Tästä sijoittamalla m_1 ja järjestelemällä

$$\begin{cases} v_1 y + (v_1 - 1)x = (v_0 - v_1)m_0 \\ (p_0 - 1)y + p_0 x = 0 \end{cases}$$

josta ratkaistaan (analyyttisesti tai numeerisesti) tässä ensin $y = y(x)$ ja sitten y ja x:

$$x = (1 - p_0)\, m_\Delta, \qquad y = p_0\, m_\Delta, \qquad m_\Delta = \frac{v_1 - v_0}{1 - v_1 - p_0} m_0$$

(Ratkaisusta, kuten yhtälöstäkin, näkyy, että pigmenttiä pitää lisättävässä seoksessa olla samassa suhteessa kuin alkuperäisessäkin seoksessa: $\frac{y}{x+y} = \frac{p_0}{p_0 + 1 - p_0} = p_0$.)

A	B	C	D
$m_0 = 5000$	$m_0 = 5000$	$m_0 = 5000$	$m_0 = 5000$
$v_0 = 5{,}40\,\%$	$v_0 = 5{,}30\,\%$	$v_0 = 5{,}20\,\%$	$v_0 = 4{,}70\,\%$
$v_1 = 6{,}60\,\%$	$v_1 = 6{,}70\,\%$	$v_1 = 6{,}80\,\%$	$v_1 = 7{,}30\,\%$
$p_0 = 2{,}60\,\%$	$p_0 = 2{,}50\,\%$	$p_0 = 2{,}40\,\%$	$p_0 = 1{,}90\,\%$
$x = 64.239829$	$x = 75.026795$	$x = 85.836910$	$x = 140.237325$
≈ 64.2	≈ 75.0	≈ 85.8	≈ 140.2
$\frac{v_0 - v_1}{v_1 - 1} \approx 0.0128$	$\frac{v_0 - v_1}{v_1 - 1} \approx 0.0150$	$\frac{v_0 - v_1}{v_1 - 1} \approx 0.0172$	$\frac{v_0 - v_1}{v_1 - 1} \approx 0.0280$
$+0.066\, y \; -0.934\, x = -60$	$+0.067\, y \; -0.933\, x = -70$	$+0.068\, y \; -0.932\, x = -80$	$+0.073\, y \; -0.927\, x = -130$
$-0.974\, y \; +0.026\, x = 0$	$-0.975\, y \; +0.025\, x = 0$	$-0.976\, y \; +0.024\, x = 0$	$-0.981\, y \; +0.019\, x = 0$
$y = 1.7181\ldots$	$y = 1.9273\ldots$	$y = 2.1145\ldots$	$y = 2.7203\ldots$
≈ 1.7	≈ 1.9	≈ 2.1	≈ 2.7
$x = 64.3612\ldots$	$x = 75.1652\ldots$	$x = 85.9912\ldots$	$x = 140.4515\ldots$
≈ 64.4	≈ 75.2	≈ 86.0	≈ 140.5
$(m_\Delta = 66.079)$	$(m_\Delta = 77.093)$	$(m_\Delta = 88.106)$	$(m_\Delta = 143.172)$

a) Vaihtoehto: Muun aineen kuin veden massa, m_*, ei muutu. m_* voidaan esittää kahdella tavalla:

$$m_* = (1 - v_0)m_0 = (1 - v_1)m_1 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1 = \frac{1 - v_0}{1 - v_1} m_0 \tag{2}$$

Josta suoraan tulos

$$x = v_1 m_1 - v_0 m_0 = \frac{v_1 - v_0}{1 - v_1} m_0.$$

$m_* \approx 4730.000$	$m_* \approx 4735.000$	$m_* \approx 4740.000$	$m_* \approx 4765.000$
$m_1 \approx 5064.240$	$m_1 \approx 5075.027$	$m_1 \approx 5085.837$	$m_1 \approx 5140.237$
$m_1/mb_* = 1.01285$	$m_1/mb_* = 1.01501$	$m_1/mb_* = 1.01717$	$m_1/mb_* = 1.02805$
$x = 64.239829$	$x = 75.026795$	$x = 85.836910$	$x = 140.237325$
≈ 64.2	≈ 75.0	≈ 85.8	≈ 140.2

b) Vaihtoehto: Muun aineen kuin veden tai pigmetin massa, m_*, ei muutu. m_* voidaan esittää kahdella tavalla:

$$m_* = (1 - p_0 - v_0)m_0 \tag{3}$$

$$m_* = (1 - p_1 - v_1)m_1 \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1 = \frac{1 - p_0 - v_0}{1 - p_1 - v_1} m_0 = \frac{1 - p_0 - v_0}{1 - p_0 - v_1} m_0 = \left(1 + \frac{v_1 - v_0}{1 - p_0 - v_1}\right) m_0$$

Tästä saadaan suoraan

$$x = v_1 m_1 - v_0 m_0, \qquad y = p_1 m_1 - p_0 m_0.$$

$m_* \approx 4600.000$	$m_* \approx 4610.000$	$m_* \approx 4620.000$	$m_* \approx 4670.000$
$m_1 \approx 5066.079$	$m_1 \approx 5077.093$	$m_1 \approx 5088.106$	$m_1 \approx 5143.172$
$m_1/m_* = 1.01322$	$m_1/m_* = 1.01542$	$m_1/m_* = 1.01762$	$m_1/m_* = 1.02863$
$y = 1.7181\ldots$	$y = 1.9273\ldots$	$y = 2.1145\ldots$	$y = 2.7203\ldots$
≈ 1.7	≈ 1.9	≈ 2.1	≈ 2.7
$x = 64.3612\ldots$	$x = 75.1652\ldots$	$x = 85.9912\ldots$	$x = 140.4515\ldots$
≈ 64.4	≈ 75.2	≈ 86.0	≈ 140.5

Tehtävä 3

Ennen lahjoituksia jäljellä olevaa pääomaa vuonna $(2007+n)$ merkitään C_n. Vuoden $2007+n$ lahjoitus on $p\,C_n + d$. Pääoman muutos on lahjoitus, joten jäljellä oleva pääoma noudattaa kaavaa

$$C_n - C_{n+1} = p\,C_n + d \quad \Leftrightarrow \quad C_{n+1} = (1-p)\,C_n - d.$$

a) Merkitään $q = 1 - p$, jolloin

$$\begin{aligned} C_1 &= qC_0 - d \\ C_2 &= q^2C_0 - dq - d \\ C_3 &= q^3C_0 - dq^2 - dq - d \\ C_3 &= q^3C_0 - d(q^3 + q^2 + q + 1) \\ &\dots \end{aligned}$$

Tässä $n = 2011 - 2007 + 1 = 5$.

b) Yleistämällä saadaan

$$C_n = q^nC_0 - dS_n, \text{ jossa } S_n = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}.$$

Vaaditaan, että pääoma on ei-negatiivinen ja ratkaistaan d:

$$C_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad d \leq \frac{q^nC_0}{S_n}$$

jossa $n = 2031 - 2007 + 1 = 25$.

*) Geometrisen summan kaavan voi muistaa tai johtaa,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + q + \cdots + q^{n-1} \\ qS_n &= \phantom{1 + {}} q + \cdots + q^{n-1} + q^n \;, \\ (1-q)S_n &= 1 \phantom{{}+ q + \cdots + q^{n-1}} - q^n \end{aligned}$$

tai summan S voi laskea suoraan.

A	B	C	D
$C_0 = 150\,000$	$C_0 = 150\,000$	$C_0 = 150\,000$	$C_0 = 150\,000$
$d = 1000$	$d = 1000$	$d = 1000$	$d = 1000$
$p = 13\,\%$	$p = 14\,\%$	$p = 16\,\%$	$p = 17\,\%$
$q = 87\,\%$	$q = 86\,\%$	$q = 84\,\%$	$q = 83\,\%$
$C_1 = 129500.00$	$C_1 = 128000.00$	$C_1 = 125000.00$	$C_1 = 123500.00$
$C_2 = 111665.00$	$C_2 = 109080.00$	$C_2 = 104000.00$	$C_2 = 101505.00$
$C_3 = 96148.55$	$C_3 = 92808.80$	$C_3 = 86360.00$	$C_3 = 83249.15$
$C_4 = 82649.24$	$C_4 = 78815.57$	$C_4 = 71542.40$	$C_4 = 68096.79$
$C_5 = 70904.84$	$C_5 = 66781.39$	$C_5 = 59095.62$	$C_5 = 55520.34$
$d \leq 618.84864\ldots$	$d \leq 495.22584\ldots$	$d \leq 311.01783\ldots$	$d \leq 244.13532\ldots$
$d < 618.84$	$d < 495.22$	$d < 311.01$	$d < 244.13$
$S_{25} \approx 7.45570$	$S_{25} \approx 6.97829$	$S_{25} \approx 6.17004$	$S_{25} \approx 5.82657$

Tehtävä 4[1]

Merkitään hyppyjen siirtymiä *vasemmalle* a (positiivinen) ja *oikealle* b (negatiivinen). Tarkastellaan "$(k, n-k)$-hyppysarjaa", jossa on tehty jossakin järjestyksessä k hyppyä *oikealle*, ja $n-k$ *vasemmalle*. Kirpun sijainti lähtöpisteeseen nähden on tällön

$$d(n,k) = kb + (n-k)a \tag{5}$$

ja riippumaton hyppyjen järjestyksestä.
Yksittäisen hyppysarjan, todennäköisyys saadaan tulona riippumattomien peräkkäisten hyppyjen todennäköisyyksistä, esimerkisi $P(↰\ ↱\ ↱\ ↱\ ↰\ ↰\ \cdots) = p\,(1-p)^3\,p^2 \cdots$.
Toisaalta $(k, n-k)$-hyppysarjoja on $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, joten "$(k, n-k)$-tapahtuman" todennäköisyys on (ns. binomitodennäköisyys)

$$P(n,k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}\,. \tag{6}$$

Kaikkiaan n hypyn pituisia hyppysarjoja on 2^n kappaletta, kun erotetaan sarjat, joissa hypyt on tehty eri järjestyksessä.

ab) Tiedämme a)-kohdassa että $n = 3$. Voimme ratkaista k:n lausekkeesta (5):

$$d(n,k) = kb + (n-k)a = 0 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{an}{a-b}$$

Vastaava todennäköisyys tapahtumalle saadaan sijoittamalla k lausekkeseen (6). Kohdassa (b) sijoitetaan $n = 30$.

c) Nyt $n = 30$ ja k:n saadaan ehto

$$|d(n,k)| = 100 \Leftrightarrow kb + (n-k)a = \pm 100 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{\mp 100 + an}{a-b}$$

lausekkeesta (5). Missään tehtäväsarjassa saatu hyppyjen lukumäärä k ei ole kokonaisluku, juuri 30 hypyllä ei voi päätyä metrin päähän, joten todennäköisyys nolla.

a) Vaihtoehto: Luettelemme kaikki 2^3 hyppysarjaa, kutakin yksittäistä hyppysarjaa vastaavan siirtymät ja todennäköiysyyden:

↱ ↱ ↱	↰ ↱ ↱, ↱ ↰ ↱, ↱ ↱ ↰	↱ ↰ ↰, ↰ ↱ ↰, ↰ ↰ ↱	↰ ↰ ↰
$(1-p)^3\,p^0$	$(1-p)^2\,p^1$	$(1-p)^1\,p^2$	$(1-p)^0\,p^3$
$3a > 0$	$2a + b > 0$	$a + 2b = 0$	$b < 0$

Todennäköisyys on siis $3(1-p)p^2$. Kohdassa b) tämä on työläs tapa.

	A	B	C	D
	$a = 8$ $b = -4$ $p = 0{,}62$	$a = 10$ $b = -5$ $p = 0{,}66$	$a = 8$ $b = -4$ $p = 0{,}72$	$a = 10$ $b = -5$ $p = 0{,}74$
a)	$k = 2$, $n - k = 1$ $P = 0.26858\ldots$ ≈ 0.269	$k = 2$, $n - k = 1$ $P = 0.22888\ldots$ ≈ 0.229	$k = 2$, $n - k = 1$ $P = 0.16934\ldots$ ≈ 0.169	$k = 2$, $n - k = 1$ $P = 0.15007\ldots$ ≈ 0.150
b)	$k = 20$, $n - k = 10$ $P = 0.000993942\ldots$ ≈ 0.001	$k = 20$, $n - k = 10$ $P = 0.000200812\ldots$ ≈ 0.000	$k = 20$, $n - k = 10$ $P = 0.000009868\ldots$ ≈ 0.000	$k = 20$, $n - k = 10$ $P = 0.000002948\ldots$ ≈ 0.000
c)	$k = \begin{cases} \frac{85}{3} \\ \frac{35}{3} \end{cases} \notin \mathcal{Z}_+$ $P = 0$	$k = \begin{cases} \frac{80}{3} \\ \frac{40}{3} \end{cases} \notin \mathcal{Z}_+$ $P = 0$	$k = \begin{cases} \frac{85}{3} \\ \frac{35}{3} \end{cases} \notin \mathcal{Z}_+$ $P = 0$	$k = \begin{cases} \frac{80}{3} \\ \frac{40}{3} \end{cases} \notin \mathcal{Z}_+$ $P = 0$
Muita arvoja: a)	$\binom{n}{k} = 3$ $(1-p)^k p^{n-k}$ ≈ 0.089528	$\binom{n}{k} = 3$ $(1-p)^k p^{n-k}$ ≈ 0.076296	$\binom{n}{k} = 3$ $(1-p)^k p^{n-k}$ ≈ 0.056448	$\binom{n}{k} = 3$ $(1-p)^k p^{n-k}$ ≈ 0.050024
Muita arvoja: b)	$\binom{n}{k} = 30045014$ $(1-p)^k p^{n-k}$ $\approx 2.22093e-07$	$\binom{n}{k} = 30045014$ $(1-p)^k p^{n-k}$ $\approx 1.02374e-06$	$\binom{n}{k} = 30045014$ $(1-p)^k p^{n-k}$ $\approx 7.93644e-06$	$\binom{n}{k} = 30045014$ $(1-p)^k p^{n-k}$ $\approx 1.47379e-05$

[1] Tässä versiossa korostetut termit *vasen* ja *oikea* on vaihdettu keskenään nyt vastaamaan tehtävänantoa, numeroarvot muuttumattomat.

Tehtävä 5

Vaihtoehto 1, kohta a) Koska

$$|P_k|^2 = \cos^2(k35°) + \sin^2(k35°) = 1,$$

pisteet sijaitsevat yksikköympyrälle. Kutakin 72-kulmion sivua vastaava keskuskulma on $\alpha = \frac{360°}{72} = 5°$.
Jos Q_0 on yksikköympyrällä sijaitsevan 72-kulmion kärki, niin $Q_0 = (\cos\beta, \sin\beta)$ jollakin β. Kaikki 72-kulmion kärkipisteet ovat tällöin

$$Q_j = (\cos(\alpha\, j + \beta), \sin(\alpha\, j + \beta)),$$

jossa $j = 0, \ldots, 71$.
Jotta P_k, $k \in \mathcal{Z}$, olisi kärkipiste, pitää olla olemassa $j = j(k)$ siten, että

$$P_k = Q_j \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \cos(\alpha\, j + \beta) = \cos(35°\, k) \\ \sin(\alpha\, j + \beta) = \sin(35°\, k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\; 5°\, j + \beta + 360°\, n = 35° k \text{ jollakin } n \in \mathcal{Z}$$

$$\Leftarrow\; j + 72n = 7k, \quad \beta = 0.$$

Mikä tahansa kokonaisluku, myös $7k$, on esitettävissä muodossa $j+72n$: valitaan $n = \lfloor \frac{7k}{72} \rfloor$ jolloin $j := 7k - 72n \in \{0, 1, 2, \ldots, 71\}$. Tässä $\lfloor m \rfloor$ on kokonaislukuosa luvusta $m \geq 0$.

Kohta b) Ei ole selvää saavutetaanko kaikkia monikulmion pisteitä, vai jääkö joku välistä. Pisteitä P_k on korkeintaan 72 kappaletta, koska ne kaikki a-kohdan perusteella ovat monikulmion kärkipisteitä. Näytetään nyt että pisteitä on vähintään 72 kappaletta:

$$P_i = P_j \;\Leftrightarrow\; 35° i - 35° j = 360° n$$

jollakin kokonaisluvulla n.

$$n = \frac{35(i-j)}{360} = \frac{7(i-j)}{72} \in \mathcal{N}$$

vain jos $i - j$ on 72 moninkerta, koska $72 = 2^3 3^2$ ei ole jaollinen 7:llä. Pisteet $P_1, \ldots, P_{72}$ ovat siis kaikki (pareittain) tason eri pisteitä.

Vaihtoehto 2, kohta a) Huomataan, että pisteet $\{P_k\}$ ovat 35° yksikköympyrällä. Edelleen $\frac{35}{\alpha} = 7$, joten indeksiltään peräkkäisten pisteiden P_k, P_{k+1} välinen keskuskulma 72-kulmion sivun keskuskulman monikerta.
Valitaan 72-kulmio yksikköympyrältä siten, että P_1 on 72-kulmion kärkipiste, jolloin välttämättä edellisen perusteella muutkin pisteet $P_2, P_3, \ldots$ ovat kärkipisteitä (vaikkei vielä olekaan selvää saavutetaanko kaikki monikulmion kärkipisteet).

Kohta b) "Hyppy" seuraavaan pisteeseen, $P_k \to P_{k+1}$, on aina k:stä *riippumaton vakio*, 35 astetta. Uusia pisteitä sarjasta löytyy vain kunnes päädytään uudestaan lähtöpisteeseen; tämän jälkeen tason pisteet toistuvat. Lähtöpisteeseen päädytään, kun on hypätty tarkalleen täyden ympyrän monikerta: $35k = 360n \Leftrightarrow 7k = 72n$. Koska luvuilla 72 ja 7 ei ole yhteisiä tekijöitä, *pienin* positiivinen kokonaisluku k, jolla yhtälöllä on ratkaisu, on 72. Alkupisteeseen päädytään *ensi kerran* 72 askeleen jälkeen.

Erityistä huomattavaa Siitä, että jonossa peräkkäiset pisteet P_k, P_{k+1} ovat tasavälein, ei suoraan seuraa, että myös pistejoukon P_k pisteet ympyrällä ovat tasavälein. Siitä, että $P_k = P_{k+72}$ seuraa, että pistejoukossa on *korkeintaan* 72 pistettä, ei että niitä on vähintään 72. Oleellista on näyttää, että 72 on pienin jakso.

Tehtävä 6

Merkitään
$$f(k) = \int_0^1 \big|g(x)\big|\, dx, \qquad g(x) = x - kx^2, \qquad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Etsitään nollakohdat $g(x) = x(1-kx) = 0$ avoimella välillä $x \in (0,1)$; ne ovat $x_k = 1/k$ kun $k > 1$. Tarkastellaan nyt kahta k:n osaväliä erikseen, kummassakin etsimme arvojoukkoa tutkimalla funktion f vastaavia ääriarvoja.

Tapaus $k \leq 1$: $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0,1]$ (ei nollakohtia) ja
$$f(k) = \int_0^1 g(x)dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{2} - \frac{k}{3},$$
jossa integraalifunktio
$$G(x) := \int g(x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{kx^3}{3} = (\frac{1}{2} - \frac{kx}{3})x^2.$$

$f'(k) = -\frac{1}{3} < 0$, joten pienin arvo joukossa $k \leq 1$ on $f(1) = \frac{1}{6} \approx 0,17$. Koska $\lim_{k\to-\infty} f(k) = \infty$, $f(k)$ saa joukossa $k \leq 1$ arvot $[f(1), \infty)$.

Tapaus $k > 1$: Tällöin $g'(x_k) = 1 - 2k/k < 0$, joten $g(x) \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1/k$ ja $g(x) < 0$, kun $1/k < x \leq 1$.
$$\begin{aligned} f(k) &= \int_0^{1/k} g(x)dx - \int_{1/k}^1 g(x)dx \quad = 2G(1/k) - G(0) - G(1) \\ &= 2\frac{1}{6k^2} - 0 - (\frac{1}{2} - \frac{k}{3}) \quad = \frac{1}{3}(k^{-2} + k) - \frac{1}{2}. \\ f'(k) &= \frac{1}{3}(-2k^{-3} + 1) \end{aligned}$$

josta $0 = f'(k_0)$ kun $k_0 = 2^{1/3}$. Koska f on välillä jatkuva ja derivoituva, mahdolliset ääriarvot avoimella välillä ovat
$$f(k_0) = \frac{1}{3}(2^{-2/3} + 2^{1/3}) - \frac{1}{2} = \frac{2^{1/3} - 1}{2} \approx 0.13$$

Toisaalta
$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty, \quad \text{and} \quad \lim_{k\to 1} f(k) = f(1) \approx 0,17.$$

Koska $f(1) > f(k_0)$, $f(k)$ saa joukossa $k > 1$ arvot $[f(k_0), \infty)$.

Arvojoukko Funktion f arvojoukko on osavälien arvojoukkojen unioni
$$f(\mathbb{R}) = [f(k_0), \infty) \cup [f(1), \infty) = [f(k_0), \infty) = \left[\frac{2^{1/3} - 1}{2}\ ,\ \infty\right).$$

Arvostelu

Yleistä

Pelkän vastauksen antaminen ilman perusteluja tai riittäviä välivaiheita ei ole ole hyväksyttävää. Pelkkä oikea vastaus ilman perusteluja on usein arvoton.

Välitulosten antaminen riittättömällä tarkkuudella on virhe. Jos tehtävä on laskettu riittävällä tarkkuudella, mutta vastaus annettu väärällä tarkkuudella tai väärään suuntaan pyöristettynä annetaan tehtävästä korkeintaan $5/6$ p.

Kun yhtälöiden ratkaisussa analyyttisen ratkaisemisen sijaan käytetään numeerisia menetelmiä, kuten haarukointia, edellytetään ratkaisulta erityisen hyvää dokumentointia. Ratkaisusta tulee käydä ilmi, että menettely osoitettavasti tuottaa ratkaisun tehtävässä vaadittavalla tarkkuudella.

Jatkossa viitataan arvostelussa edeltäviin vastauksiin.

Tehtävä 1

Osatehtävät 2p+4p.

Kohdan b) tehtävän symmetrian ($|PT| = |PT'|$ ja $\measuredangle POT = \measuredangle POT'$) toteaminen ja suureen α ratkaiseminen oikein antaa $2/4$ p.

Tehtävä 2

Osatehtävät 2p+4p.

Kohdassa b) yhtälön muodostaminen oikein $2/4$ p. Yhtälön ratkaiseminen ja vastaus $4/4$ p. Vaihtoehtoratkaisussa m^* ja m_1 laskeminen antaa $1/4$ p.

Tehtävä 3

Osatehtävät 2p+4p.

Kohdassa a) C_1 muodostaminen/laskeminen oikein $1/2$ p; C_5 antaa $2/2$ p.

Kohdassa b) ehdon $C_{25}(d) \geq 0$ lausuminen muodossa, josta d voidaan ratkaista jakolaskulla antaa $3/4$ p.

Tehtävä 4

Osatehtävät 2p+2p+2p.

Kohdassa c) pelkkä vastaus ilman perusteluja ei anna pisteitä.

Tehtävä 5

Osatehtävät 3p+3p.

Tehtävässä on kiinnitetty huomiota korrektiin päättelyyn, huomioiden on johdettava päättelyyn. Tehtävän väitteet voidaan näyttää myös yhdessä päättelyketjussa, jolloin arvostelu perustuu kokonaisuuden etenemiseen.

Tehtävä 6

Integrandin $|g(x)|$ itseisarvojen purku välillä $x \in [0,1]$ sopivilla k osaväleillä antaa $1/6$ p. Edellisen lisäksi lausekkeen $f(k)$ integrointi erikseen tapauksessa $k \leq 1$ ja tapauksessa $k \geq 1$ antaa $4/6$ p.