Ohjeita. Laita mielellään useamman tehtävän ratkaisu samalle konseptiarkille, mutta aloita jokainen ratkaisu *tyhjältä sivulta*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. Yleisesti tehtävän ratkaisun tulisi sisältää myös annetun vastauksen perustelut.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 Puiston harvennuksen yhteydessä kaadetut puut kuivataan kasassa ja toimitetaan lämpövoimalassa poltettavaksi. Tuoreen pöllin painosta on vettä 43%, kasassa kuivatun pöllin painosta on vettä 23%.

Täysin vedettömän puuaineksen poltosta saadaan energiaa 5,34 kWh/kg. Kosteaa puuta poltettaessa aiheuttaa vesi 0,74 kWh:n energiahävikin vesikiloa kohti.

(a) Montako kiloa alkuaan 22,0 kg painoinen pölli keveni kasassa kuivattaessa?

(b) Montako prosenttia enemmän energiaa saadaan kuivatusta pöllistä verrattuna siihen, että sama pölli olisi poltettu tuoreena? Pöllin massaa ei tunneta.

Anna vastaukset (a) 100 gramman ja vastaavasti (b) 0,01-prosenttiyksikön tarkkuudella.

A2 Ratkaise $x \in \mathbb{R}$, kun

(a) $\left(x - \dfrac{6}{x}\right)^2 \cdot \cos x = 0,$

(b) $3 + x + \sqrt{3 - x} = 0.$

A3 Neliön muotoinen vanerilevy on asetettu koordinaatistoon siten, että levyn kärjet ovat pisteissä $(0,0), (a,0), (a,a)$, ja $(0,a)$, jossa $a > 0$. Levystä muotoillaan pala, jota rajaavat suorat $x = 0$, $y = a$ ja paraabeli $y = x^2/a$. Levy sahataan ensin pitkin suoria $y - a = k(x - a)$ ja $y = x + b$. Syntynyt murtoviiva hiotaan paraabelin muotoon.

Määritä parametrit k ja b niin, että hiottavaa jää mahdollisimman vähän.

A4 Laske integraali $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x |e^x - 1| \, dx.$

A5 Suoran tien varressa, kohtisuorassa tietä vastaan on mainostaulu, jonka leveys on 9 m ja pienin etäisyys ajolinjasta on 16 m.

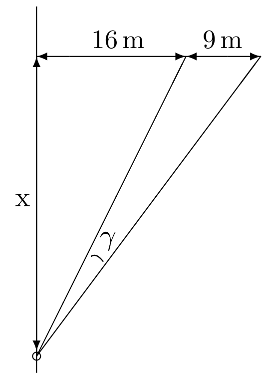
Olkoon γ kulma, jossa autoilija näkee taulun ollessaan etäisyydellä x metriä siitä pisteestä ajoradalla, joka on lähimpänä taulua.

(a) Määritä $f(x)$ siten, että $\tan\gamma = f(x)$.

(b) Millä x:n arvolla $\tan\gamma$ (ja siis myös γ) saa suurimman arvonsa?

Vihje:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\,.$$



Kuva tehtävään A5.

A6 Polynomissa $p(x) = x^2 + ax + b$ valitaan vakiot a ja b satunnaisesti (tasajakauma) ja toisistaan riippumatta väliltä $[-1, 1]$.

(a) Millä todennäköisyydellä p:n minimikohta on välillä $[0, 1]$?

(b) Millä todennäköisyydellä käyrä $y = p(x)$ ei leikkaa eikä sivua suoraa $y = x$?

Anvisningar. Placera gärna lösningar på flera uppgifter på samma koncept papper, men börja varje lösning *på en tom sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas*. Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen. Generellt borde lösningen omfatta även argumentationen för det givna svaret.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 Träden som fälldes i samband med en gallring i en park stapeltorkades och transporterades därefter till ett värmekraftverk för förbränning. 43% av vikten hos färsk ved är vatten, medan 23% av vikten hos stapeltorkad ved är vatten.

Vid förbränning av fullständigt torr vedmassa fås energin 5,34 kWh/kg. Vid förbränning av fuktig ved ger vattnet en energiförlust på 0,74 kWh per kilo vatten.

(a) Med hur många kilo minskar vedens vikt vid stapeltorkningen då vedens ursprungliga vikt var 22,0 kg.

(b) Hur många procent mer energi får man vid förbränning av stapeltorkad ved jämfört med att man hade förbrännt veden färsk? Vedens massan är obekant.

Ge svaren med (a) 100 grams respektive (b) 0,01 procentenhets noggrannhet.

A2 Lös $x \in \mathbb{R}$, då

(a) $\left(x - \dfrac{6}{x}\right)^2 \cdot \cos x = 0,$

(b) $3 + x + \sqrt{3 - x} = 0.$

A3 En kvadratisk fanerskiva har placerats i ett koordinatsystem så att skivans hörn är i punkterna $(0,0), (a,0), (a,a)$, och $(0,a)$, där $a > 0$. Skivan formas till ett stycke, som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = a$ och parabeln $y = x^2/a$. Först sågas skivan längs linjerna $y - a = k(x - a)$ och $y = x + b$. Den uppkomna brutna linjen slipas därefter ner så att den får formen av parabeln.

Bestäm parametrarna k och b så att det blir så lite som möjligt att slipa ner.

A4 Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x |e^x - 1| \, dx.$

A5 Vid sidan av en rak väg, vinkelrätt mot vägen, står en 9 m bred tavla vars kortaste avstånd från körlinjen är 16 m.

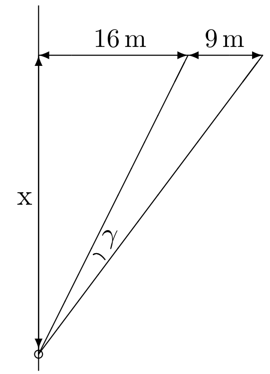
Låt γ vara den horisontella vinkeln i vilken en bilist ser tavlan, då hon befinner sig på avståndet x från punkten på körlinjen, som är närmast tavlan.

(a) Bestäm $f(x)$ så att $\tan\gamma = f(x)$.

(b) Vid vilket värde på x får $\tan\gamma$ (och därmed även γ) sitt största värde?

Tips:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$



Bilden till uppgift A5.

A6 Konstanterna a och b i polynomet $p(x) = x^2 + ax + b$ väljs slumpmässigt (likformig fördelning) och oberoende av varandra i intervallet $[-1, 1]$.

(a) Med vilken sannolikhet är p:s minimipunkt i intervallet $[0, 1]$?

(b) Med vilken sannolikhet kommer kurvan $y = p(x)$ varken skära eller tangera linjen $y = x$?

Tehtävä 1

Veden osuus kokonaismassasta on p_0 ennen (alaindeksi 0) ja p_1 jälkeen kuivauksen, vastaavasti kuivan puuaineen osuus $1 - p_0$ ja $1 - p_1$. Veden määrä v_i suhteessa puuainekseen on

$$q_i = \frac{p_i}{1 - p_i}.$$

(a) Merkitään kokonaismassa M_0 ennen kuivausta (ja M_1 jälkeen). Puuaineksen ja veden osuuden ovat vastaavasti

$$v_0 = p_0 M, \quad m = (1 - p_0)M, \quad \text{ja} \quad v_1 = q_1 m.$$

Kokonaismassa pieneni vesimassojen erotuksella $v_0 - v_1$.

(b) Merkitään polttoarvoa c_m ja veden vaikutusta c_v, jossa $c_v < 0$. Pöllin puuaineksen määrä ei muutu kuivatessa, merkitään sitä m. Poltettaessa vapautuva energia on $E_i = c_m m + c_v v_i$ ja vastaava suhde

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{c_m m + c_v v_1}{c_m m + c_v v_0} = \frac{c_m + q_1 c_v}{c_m + q_0 c_v}.$$

Joten, riippumatta pöllin painosta, energia saadaan osuus $\frac{E_1}{E_0} - 1$ enemmän.

A	B	C	D
$p_0 = 0,43$	$p_0 = 0,42$	$p_0 = 0,44$	$p_0 = 0,43$
$p_1 = 0,23$	$p_1 = 0,23$	$p_1 = 0,22$	$p_1 = 0,21$
$q_0 = 0,7544$	$q_0 = 0,7241$	$q_0 = 0,7857$	$q_0 = 0,7544$
$q_1 = 0,2987$	$q_1 = 0,2987$	$q_1 = 0,2821$	$q_1 = 0,2658$
$M = 22,0$	$M = 22,0$	$M = 22,0$	$M = 22,0$
$m = 12,540$	$m = 12,760$	$m = 12,320$	$m = 12,540$
$v_0 = 9,46000$	$v_0 = 9,24000$	$v_0 = 9,68000$	$v_0 = 9,46000$
$v_1 = 3,74571$	$v_1 = 3,81143$	$v_1 = 3,47487$	$v_1 = 3,33342$
$v_0 - v_1 = 5,714\,\mathrm{kg}$	$v_0 - v_1 = 5,429\,\mathrm{kg}$	$v_0 - v_1 = 6,205\,\mathrm{kg}$	$v_0 - v_1 = 6,127\,\mathrm{kg}$
$\approx 5,7\,\mathrm{kg}$	$\approx 5,4\,\mathrm{kg}$	$\approx 6,2\,\mathrm{kg}$	$\approx 6,1\,\mathrm{kg}$
$c_m = 5,34$	$c_m = 5,34$	$c_m = 5,34$	$c_m = 5,34$
$c_v = -0,74$	$c_v = -0,74$	$c_v = -0,74$	$c_v = -0,74$
$\frac{E_1}{E_0} \approx 1,070519$	$\frac{E_1}{E_0} \approx 1,065532$	$\frac{E_1}{E_0} \approx 1,078324$	$\frac{E_1}{E_0} \approx 1,075608$
Vastaus: $7,05\,\%$	Vastaus: $6,55\,\%$	Vastaus: $7,83\,\%$	Vastaus: $7,56\,\%$

Tehtävä 2

(a) Toinen tekijöistä on nolla:

$$(x - \frac{c}{x})^2 \cos x \quad = \quad 0 \tag{1}$$
$$(x - \frac{c}{x})^2 = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0 \tag{2}$$
$$x = \frac{c}{x} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi \tag{3}$$
$$x = \pm\sqrt{c} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi \tag{4}$$

jossa n on mielivaltainen kokonaisluku.

(b) Määrittelyalueella $b - x \geq 0$.

$$x + a + \sqrt{b-x} = 0 \tag{5}$$
$$\Leftrightarrow \quad a + x = -\sqrt{b-x} \tag{6}$$
$$\Rightarrow \quad (x+a)^2 = b - x \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + (1+2a)x + (a^2 - b) = 0 \tag{8}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in -a - \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(a+b)}}{2} \tag{9}$$

Päättelyketju on implikaatio, joten potentiaaliset juuret eivät kaikki välttämättä toteuta alkuperäistä yhtälöä. Ratkaisu identifioidaan sijoittamalla potentiaaliset juuret takaisin alkuperäiseen yhtälöön. Vaihtoehtoisesti todetaan korotusvaiheessa, että oikea puoli on negatiivinen, joten (vasemman puolella) $x + a \leq 0$.

A	B	C	D
$c = 6$	$c = 5$	$c = 3$	$c = 2$
$x = \pm\sqrt{6} \vee$ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = \pm\sqrt{5} \vee$ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = \pm\sqrt{3} \vee$ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = \pm\sqrt{2} \vee$ $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$
$a = 3$ $b = 3$	$a = 4$ $b = 2$	$a = -3$ $b = 5$	$a = 3$ $b = -1$
$x^2 + 7x + 6 = 0$	$x^2 + 9x + 14 = 0$	$x^2 - 5x + 4 = 0$	$x^2 + 7x + 10 = 0$
$x \in \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2}$	$x \in \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2}$	$x \in \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$	$x \in \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2}$
$x \in \{-1,\ -6\}$	$x \in \{-2,\ -7\}$	$x \in \{4,\ 1\}$	$x \in \{-2,\ -5\}$
$x = -1 \Rightarrow 4 = 0$ $x = -6 \Rightarrow 0 = 0$	$x = -2 \Rightarrow 4 = 0$ $x = -7 \Rightarrow 0 = 0$	$x = 4 \Rightarrow 2 = 0$ $x = 1 \Rightarrow 0 = 0$	$x = -2 \Rightarrow 2 = 0$ $x = -5 \Rightarrow 0 = 0$
Vastaus: $x = -6$	Vastaus: $x = -7$	Vastaus: $x = 1$	Vastaus: $x = -5$

Tehtävä 3

Pienin hiottava osuus saadaan, kun suorat asetetaan sivuamaan (muttei leikkaamaan) muotoiltavaa parabelia. Suorat ovat tällöin paraabelin tangenttisuoria.

Paraabelin $y(x) = x^2/a$ tangentin kulmakerroin on $y'(x) = 2x/a$.

Piste (a, a) toteuttaa sekä suoran $y - a = k(x - a)$ että paraabelin yhtälöt, joten suora sivuaa paraabelia tässä pisteessä. Siis

$$k = y'(a) = 2a/a = 2.$$

Suoran $y = x + b$ tulee sivuta paraabelia yhdessä pisteessä, merkitään (x_0, y_0).

$$y_0 = x_0 + b = x_0^2/a \tag{10}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 - a\,x_0 - ab = 0, \tag{11}$$

Koska ratkaisuja on vain yksi, diskriminantti

$$D = a^2 + 4ab = a(a + 4b) = 0 \tag{12}$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -a/4. \tag{13}$$

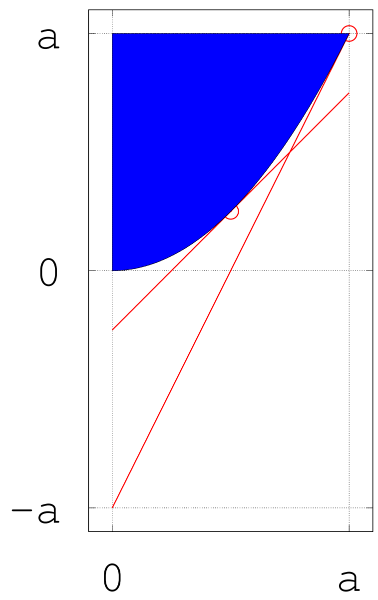
Vastaus: $k = 2$ ja $b = -a/4$.

Vaihtoehtoisesti voidaan b ratkaista tarkastemalla kulmakertoimia: Suoran $y = x + b$ tulee sivuta paraabelia pisteessä (x_0, y_0), ne yhtyvät: Suoran yhtälöstä saadaan $y_0 = x_0 + b$, ja koska suoran kulmakerroin on yksi:

$$1 = y'(x_0) = 2x_0/a; \qquad x_0 = a/2.$$

Koska myös paraabeli kulkee pisteen kautta:

$$y(x_0) = x_0 + b; \quad b = x_0^2/a - x_0 = a/4 - a/2 = -a/4.$$



Tehtävän 3 muotoiltava filmivaneripala

Tehtävä 4

Integrandissa esiintyvä $e^x - 1 \geq 0$ kun $e^x \geq 1$ kun $x \geq 0$.

$$\int_{-\ln a}^{\ln b} e^x |e^x - 1| \, dx \tag{14}$$

$$= \int_0^{\ln b} e^x (e^x - 1) \, dx + \int_{-\ln a}^{0} e^x (1 - e^x) \, dx \tag{15}$$

$$= \int_0^{\ln b} e^{2x} - e^x \, dx + \int_{-\ln a}^{0} e^x - e^{2x} \, dx \tag{16}$$

$$= \Big|_0^{\ln b} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right) + \Big|_{-\ln a}^{0} \left(e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right) \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2} b^2 - b + 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} \tag{18}$$

jossa $e^{c \ln a} = a^c$.

Vaihtoehtoisesti voidaan tehdä muuttujanvaihdos $y = e^x$, jolloin $dy = e^x dx$ ja intergraali palautuu kahden tasasivuisen ja suorakulmaisen kolmion pinta-alaksi:

$$\int_{-\ln a}^{\ln b} e^x |e^x - 1| dx = \int_{1/a}^{b} |y - 1| dy = \frac{1}{2} \left[(1 - \frac{1}{a})^2 + (1 - b)^2 \right]$$

A	B	C	D
$a = 2$ $b = 2$	$a = 2$ $b = 3$	$a = 3$ $b = 2$	$a = 3$ $b = 3$
$= \frac{4}{2} - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ $= 5/8$	$= \frac{9}{2} - 3 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ $= 17/8$	$= \frac{4}{2} - 2 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ $= 13/18$	$= \frac{9}{2} - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ $= 20/9$

Tehtävä 5

Merkitään taulun kulmien etäisyyttä tiestä d_1 ja d_2. Olkoon β_i vastaava kulma tien suuntaan nähden:

$$\tan\beta_i = \frac{d_i}{x} \tag{19}$$

$$\tan\gamma = \tan(\beta_2-\beta_1) = \frac{\tan\beta_2-\tan\beta_1}{1+\tan\beta_1\tan\beta_2} \tag{20}$$

$$= \frac{d_2/x-d_1/x}{1+d_1d_2/x^2} \tag{21}$$

$$= \frac{d_2-d_1}{x^2+d_1d_2}x = f(x) \tag{22}$$

Selvästi $f(0)=0$ ja $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, muutoin $f(x)>0$. Niinpä funktion suurin arvo, $f(x_0)$, saavutetaan, kun

$$0 = f'(x_0) = \frac{d_2-d_1}{(x_0^2+d_1d_2)^2}(x_0^2+d_1d_2-2x_0^2) \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \quad d_1d_2 = x_0^2 \quad \Leftarrow \quad x_0 = \sqrt{d_1d_2}\,. \tag{24}$$

Huomattakoon, että $f(x_0) = \frac{d_2-d_1}{2\sqrt{d_1d_2}}$, vaikka tätä ei ratkaisussa tarvitakaan.

A	B	C	D
$d_1 = 16$ $d_2 = 16+9 = 25$	$d_1 = 25$ $d_2 = 25+11 = 36$	$d_1 = 16$ $d_2 = 16+20 = 36$	$d_1 = 25$ $d_2 = 25+24 = 49$
$d_2-d_1 = 9$ $d_1d_2 = 16\cdot 25$ $= 400$	$d_2-d_1 = 11$ $d_1d_2 = 25\cdot 36$ $= 900$	$d_2-d_1 = 20$ $d_1d_2 = 16\cdot 36$ $= 576$	$d_2-d_1 = 24$ $d_1d_2 = 25\cdot 49$ $= 1225$
$f(x) = \frac{9\,x}{x^2+400}$	$f(x) = \frac{11\,x}{x^2+900}$	$f(x) = \frac{20\,x}{x^2+576}$	$f(x) = \frac{24\,x}{x^2+1225}$
$f'(x_0) =$ $= \frac{9(400-x_0^2)}{(400+x_0^2)^2}$	$f'(x_0) =$ $= \frac{11(900-x_0^2)}{(900+x_0^2)^2}$	$f'(x_0) =$ $= \frac{20(576-x_0^2)}{(576+x_0^2)^2}$	$f'(x_0) =$ $= \frac{24(1225-x_0^2)}{(1225+x_0^2)^2}$
$x_0 = \sqrt{400} = 20$	$x_0 = \sqrt{900} = 30$	$x_0 = \sqrt{576} = 24$	$x_0 = \sqrt{1225} = 35$
$f(x_0) = \frac{9}{2\cdot 20}$.	$f(x_0) = \frac{11}{2\cdot 30}$.	$f(x_0) = \frac{20}{2\cdot 24}$.	$f(x_0) = \frac{24}{2\cdot 35}$.

Tehtävä 6

a) Koska $p(x) \to \infty$ kun $|x| \to \infty$ (polynomi aukeaa ylös), polynomin $p(x)$ minimikohta $x = x_0$ saavutaan kun

$$p'(x_0) = 2x_0 + a = 0, \text{ eli } x_0 = -a/2.$$

Ja $x_0 = -\frac{a}{2} \in [0,1]$ kun $a \leq 0$, eli todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.

b) Käyrillä ei ole yhteistä pistettä, kun mikään x **ei** toteuta ehtoa

$$x - p(x) = x^2 + (a-1)x + b = 0,$$

eli kun diskriminantti

$$D = (a-1)^2 - 4b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{a-1}{2})^2 < b.$$

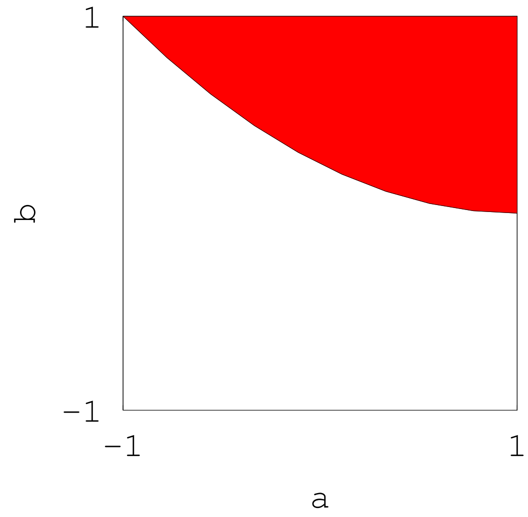
Perusjoukko on $S = [-1,1]\times[-1,1]$. Merkitään suosiollisten tapahtuminen joukkoa

$$A = \left\{ (a,b) \in S \;\middle|\; (\frac{a-1}{2})^2 < b \right\}.$$

Koska $0 \leq \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \leq 1$, kun $a \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} |A| &= \int_{-1}^{1} 1 - (\frac{a-1}{2})^2 \, da && (25) \\ &= \Big|_{-1}^{1} a - \frac{1}{12}(a-1)^3 \quad = \frac{4}{3} && (26) \\ |S| &= 4 && (27) \end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on pinta-alojen suhde $p = |A|/|S| = \frac{4}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.



Kuvassa (tummalla) merkitty joukko A tehtävässä 6.

Arvostelu

Yleisperiaatteet: Erityisen vakavaksi virhe arvioidaan, jos se muuttaa tehtävän luonnetta. Tehtävässä annettavat hyvitykset eivät ole kaikki additiisia. Mikäli ratkaisussa on lasku-, ajattelu- tai kopiointivirhe joka vaikuttaa ratkaisun loppuosaan, vaikuttaa se alentavasti koko loppuosan arvosteluun.

Mikäli hakijan ratkaisu ei noudata julkaistuja malliratkaisuja sovelletaan ohjeita.

Osakohdista tai tehtävistä voi saada maksimaaliset pisteet vain jos ratkaisu on täysin oikein.

Tehtävä 1

(a) Osakohdasta 3p. Täydet pisteet vain jos massaero $\Delta M = M_0 - M_1 = v_0 - v_1$ on laskettu oikein. Ansioita:

- Märän pöllin veden tai puuaineksen massa alussa (yhdessä tai erikseen)
- Kuivatun pöllin veden massa
- Märän tai kuivatun pöllin veden ja puuaineksen massan suhde q_i

(b) Osakohta 3p. Ansioita: (max 2p)

- oikea märän puun polttoarvo
- oikea kuivatun puun polttoarvo. Kuivatun puun polttoarvo ei saa olla laskettu käyttäen märän puun kokonaismassaa.
- energiatiheys märälle tai kuivatulle puulle.

Eksplisiittisen massan käyttö laskussa ilman perusteluja (esimerkiksi M=1kg) rajoittaa kokonaispisteet tehtävästä max 5p.

Mikäli laskussa unohdetaan massa olettaen sen aprori supistuvan pois ($E = c_m M - c_v m$) osasta ei anneta pisteitä.

Jos vastauksen tarkkuus pienempi kuin tehtävässä vaadittu annetaan tehtävästä korkeintaan 5p.

Tehtävä 2

Tehtävän kokonaispisteet 3+3p. Ansioita:

a) Oikea juuri ratkaisuhaarasta (esimerkiksi $x = \sqrt{c}$ tai $x = \pi/2$) antaa 1p, kummatkin 2p. Kolme pistettä tehtävästä, vain mikäli täysin oikea vastaus.

b) Yhtälön korreksi neliöönkorotus 1p; potentiaaliset kaksi juurta oikein 2p; toisen juuren *perusteltu* hylkääminen 3p.

Mikäli ratkaisussa ei käytetä astemerkkiä voi a-kohdasta saada korkeintaan 2p. Yhden oikean ratkaisun “arvaaminen” ja todistamisesta ei hyvitetä.

Tehtävä 3

Tehtävän kokonaispisteet 6p. Ansioita:

- Piste (a, a) on suoralla *ja* paraabelilla.
- Suoran kulmakerroin on $k = y'(a)$ (1p), edelleen $k = 2$. Pelkästään tangentin kulmakertoimen lausekkeen laskeminen ei annan pisteitä.
- Diskriminanttiehto (12) (2p)
- Ratkaisu $b = -a/4$, 1p

Tehtävä 4

Tehtävän kokonaispisteet 6p. Ansioita:

- Integraalin jakaminen kahteen osaan oikeine rajoineen 2p.

- Integrointi 2p.
- Tehtävän loppuunsaattaminen sijoituksineen 2p.

Huomaa, että integraali on luku, joka ei voi riippua integrointimuuttujasta. integraalin käsitteleminen toisin on vakava periaatevirhe.

Tehtävä 5

Osakohdat 2p+4p. Hyvitykset:

- Lauseke f muodossa (21) antaa 2p.
- Edelleen f' lauseke muodossa (23) 2p.
- Nollakohdat (valitulla tarkastelualueella), 1p
- Ääriarvotarkastelut 1p.

Tehtävä 6

Kokonaisuus 2p+4p. Hyvitykset:

- Polynomin minimikohdan löytäminen 1p
- Minimikohtaa vastaava todennäköisyys *perusteluineen* 1p.
- Diskriminanttiehdon (26) löytäminen, 1p
- Pinta-ala $|A|$ integrointi, 2p
- Vastaava todennäköisyys p, 1p.

Jos ratkaisussa tulkitaan perusjoukoksi kokonaisluvut, tehtävästä hyvitetään diskriminanttiehdosta ja minimikohdasta.