Ohjeita. Laita mielellään useamman tehtävän ratkaisu samalle konseptiarkille, mutta aloita jokainen ratkaisu *tyhjältä sivulta*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. Yleisesti tehtävän ratkaisun tulisi sisältää myös annetun vastauksen perustelut.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 (a) Derivoi $f(x) = \sqrt{x^2+3}$.

(b) Laske $\displaystyle\int (x+5)(x^2+7)\,\mathrm{d}x$.

(c) Ratkaise $|15-7x| \leq 3$.

A2 Ohjelma tuottaa kuuden merkin mittaisia merkkijonoja, jotka muodostuvat ykkösistä ja nollista. Ohjelma tuottaa merkit satunnaisesti toisista riippumatta. Merkki on ykkönen todennäköisyydellä $p = 68$ %.

(a) Millä todennäköisyydellä merkkijonossa on täsmälleen neljä ykköstä?

(b) Millä todennäköisyydellä merkkijonossa on vähintään neljä ykköstä peräkkäin?

A3 Ratkaise yhtälöt:

(a) $\sin(1+x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq x < 2\pi.$

(b) $\ln(x+3) - 1 = 2\ln x.$

Anna a-kohdassa ratkaisu tarkassa muodossa ja b-kohdassa tarkassa muodossa ja likiarvo kolmella desimaalilla. Tässä $\ln x = \log_e x$ on luonnollinen logaritmi.

A4 Joen kalakannasta 69 % kuolee talvella, mutta joka keväänä jokeen nousee 7100 uutta kalaa talvesta selvinneiden kalojen lisäksi.

(a) Kesällä vuonna 0 oli joessa 2100 kalaa. Kuinka monta kalaa joessa on kesällä vuosina 1, 2 ja 3?

(b) Kalojen määrä vuonna 0 on tuntematon. Tarkastele kalapopulaatiota kesällä vuonna n. Mitä se lähestyy, kun $n \to \infty$?

A5 Kahden kolminumeroisen luvun summa on 999. Kirjoittamalla kahdella eri tavalla luvut peräkkäin saadaan kaksi kuusinumeroista lukua, joiden suhde on 6. Määrää kolminumeroiset luvut.

A6 Pallon keskipiste on origossa. Pallon pinnalla, pisteessä $P = (3,0,4)$, on suoran, ohuen, viisi yksikön mittaisen tikun alapää. Tikku sojottaa ulos pallon pinnalta pallon säteen suuntaisesti. Pisteessä $Q = (18,-6,17)$ sijaitsee pistemäinen valonlähde.

(a) Määritä tikun yläpään koordinaatit.

(b) Mikä on pallon pinnalle piirtyvän varjon kaarenpituus?

© 2015, Dia-valinta, c/o Aalto-yliopisto, opiskelijapalvelut

Anvisningar. Placera gärna lösningar på flera uppgifter på samma koncept papper, men börja varje lösning *på en tom sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen. Generellt borde lösningen omfatta även argumentationen för det givna svaret.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 (a) Derivera $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

(b) Beräkna $\int (x+5)(x^2+7)\,\mathrm{d}x$.

(c) Lös $|15 - 7x| \leq 3$.

A2 Ett program producerar sex tecken långa sekvenser, som består av ettor och nollor. Programmet producerar tecken oberoende av varandra. Ett tecken är en etta med sannolikhet $p = 68$ %.

(a) Med vilken sannolikhet har en sådan sekvens exakt fyra ettor?

(b) Med vilken sannolikhet har en sådan sekvens minst fyra konsekutiva ettor?

A3 Lös ekvationerna:

(a) $\sin(1 + x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq x < 2\pi.$

(b) $\ln(x + 3) - 1 = 2 \ln x.$

Ge lösningarna i a-delen i exakt form och i b-delen i exakt form och närmevärdet med tre decimaler. Här är $\ln x = \log_e x$ den naturliga logaritmen.

A4 I en å dör 69 % av fiskbeståndet på vintern, men varje vår stiger 7100 nya fiskar till ån som ett tillskott till de fiskar, som klarat vintern.

(a) På sommaren år 0 fanns det 2100 fiskar i ån. Hur många fiskar fanns det i ån på sommaren åren 1, 2 ja 3?

(b) Antal fiskar år 0 är obekant. Betrakta fiskpopulationen på sommaren år n. Vad närmar den, då $n \to \infty$?

A5 Summan av två tresiffriga tal är 999. Genom att skriva talen på två olika sätt efter varandra får man två sexsiffriga tal, vars kvot är 6. Bestäm de tresiffriga talen.

A6 Ett klot har sin mittpunkt i origo. På klotets yta, i punkten $P = (3, 0, 4)$, finns nedre ändan av en rak, tunn, fem enheter lång sticka. Stickan pekar ut från klotets yta parallellt med klotets radie. I punkten $Q = (18, -6, 17)$ finns en punktformad ljuskälla.

(a) Bestäm koordinaterna för den övre ändan av stickan.

(b) Bestäm båglängden hos skuggan av stickan på klotets yta.

© 2015, Dia-antagningen, c/o Aalto-universitetet, studerandeservice

Tehtävä 1

(a) $f(x) = \sqrt{x^2+a} = (x^2+a)^{1/2}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}.$$

(b) $\int (x+a)(x^2+b)\mathrm{d}x$

$$= \int \left(x^3 + ax^2 + bx + ab\right)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x + abx + C$$

(c)

$$\begin{aligned} & |a - bx| \le c && (1) \\ \Leftrightarrow\ & -c \le a - bx \le c && (2) \\ \Leftrightarrow\ & -c - a \le -bx \le c - a && (3) \\ \underset{b>0}{\Leftrightarrow}\ & \frac{a-c}{b} \le x \le \frac{a+c}{b} && (4) \end{aligned}$$

Tässä (2) $\Leftrightarrow -c \le a - bx \wedge a - bx \le c \Leftrightarrow bx - a \le c \wedge a - bx \le c$.

(c)

$$\begin{aligned} & |a - bx| \le c && (5) \\ \underset{(c>0)}{\Leftrightarrow}\ & (a - bx)^2 \le c^2 && (6) \\ \Leftrightarrow\ & b^2x^2 - 2abx + a^2 - c^2 \le 0 && (7) \\ \underset{(*)}{\Leftrightarrow}\ & \frac{2ab - \sqrt{4b^2c^2}}{2b^2} \le x \le \frac{2ab + \sqrt{4b^2c^2}}{2b^2} && (8) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a-c}{b} \le x \le \frac{a+c}{b} && (9) \end{aligned}$$

* $b > 0$, joten merkkikaavio $+|-|+$.

A	B	C	D
$f(x) = \sqrt{x^2+3}$ $f'(x) = \frac{x}{f(x)}$	$f(x) = \sqrt{x^2+4}$ $f'(x) = \frac{x}{f(x)}$	$f(x) = \sqrt{x^2+5}$ $f'(x) = \frac{x}{f(x)}$	$f(x) = \sqrt{x^2+6}$ $f'(x) = \frac{x}{f(x)}$
$\int (x+5)(x^2+7)\,\mathrm{d}x =$ $\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{7x^4}{2} + 35x$	$\int (x+4)(x^2+7)\,\mathrm{d}x =$ $\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{7x^4}{2} + 28x$	$\int (x+2)(x^2+9)\,\mathrm{d}x =$ $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{9x^4}{2} + 18x$	$\int (x+7)(x^2+3)\,\mathrm{d}x =$ $\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + \frac{3x^4}{2} + 21x$
$\lvert 15 - 7x\rvert \le 3$	$\lvert 16 - 5x\rvert \le 3$	$\lvert 17 - 9x\rvert \le 3$	$\lvert 13 - 7x\rvert \le 3$
$\frac{12}{7} \le x \le \frac{18}{7}$	$\frac{13}{5} \le x \le \frac{19}{5}$	$\frac{14}{9} \le x \le \frac{20}{9}$	$\frac{10}{7} \le x \le \frac{16}{7}$

Tehtävä 2

(a) Jonossa on kaksi nollaa ja neljä ykköstä, eli

$$P = \binom{6}{4} p^4 (1-p)^2$$

(b) Suotuisat, keskenään poissulkevat tapaukset ovat muotoa

$$1111xx, \quad 01111x, \quad x01111,$$

jossa x on mielivaltainen merkki. Eli

$$P = p^4 + 2p^4(1-p) = (3-2p)p^4$$

Perustapaukset:

1111xx	x01111	01111x	P
111100	001111	011110	$3\,p^4(1-p)^2$
111101, 111110	101111	011111	$4\,p^5(1-p)$
111111			p^6

A	B	C	D
$p = 68$ $P = 0,3284\cdots \approx$ 33%	$p = 76$ $P = 0,2882\cdots \approx$ 29%	$p = 79$ $P = 0,2576\cdots \approx$ 26%	$p = 82$ $P = 0,2197\cdots \approx$ 22%
$P = 0,3506\cdots \approx$ 35%	$P = 0,4937\cdots \approx$ 49%	$P = 0,5530\cdots \approx$ 55%	$P = 0,6148\cdots \approx$ 61%

Tehtävä 3

(a)

$$\sin y = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad y \in \mathbb{R} \tag{10}$$
$$y = -\tfrac{1}{4}\pi + 2n_1\pi \ \lor\ y = \pi - (-\tfrac{1}{4}\pi) + 2n_2\pi,\ \forall n_i \in \mathbb{Z} \tag{11}$$
$$x = y - 1 \in [0, 2\pi] \tag{12}$$
$$x = \tfrac{7}{4}\pi - 1 \quad (n_1 = 1) \quad \lor \quad x = \tfrac{5}{4}\pi - 1 \quad (n_2 = 0) \tag{13}$$

(b)

$$\ln(x+a) - 1 = 2\ln x \tag{14}$$
$$\underset{*}{\Rightarrow} \quad \ln(x+a) = \ln(e) + \ln x^2 \tag{15}$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln(x+a) = \ln ex^2 \tag{16}$$
$$\underset{*}{\Rightarrow} \quad x + a = ex^2 \tag{17}$$
$$\Leftrightarrow \quad ex^2 - x - a = 0 \tag{18}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4ae}}{2e} \tag{19}$$

Kun $x, x + a > 0 \Leftrightarrow x > 0$, myös *-kohdissa on ekvivalenssi.
Ratkaisu on siis

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4ea}}{2e} \tag{20}$$

A	B	C	D
$x = \{\frac{7}{4}\pi - 1, \frac{5}{4}\pi - 1\}$ $=$ $\{4,497\ldots; 2,927\ldots\}$	$x = \{\frac{7}{4}\pi - 1, \frac{5}{4}\pi - 1\}$ $=$ $\{4,497\ldots; 2,927\ldots\}$	$x = \{\frac{7}{4}\pi - 1, \frac{5}{4}\pi - 1\}$ $=$ $\{4,497\ldots; 2,927\ldots\}$	$x = \{\frac{7}{4}\pi - 1, \frac{5}{4}\pi - 1\}$ $=$ $\{4,497\ldots; 2,927\ldots\}$
$x = = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 3\,e}}{2e} = \frac{1 + \sqrt{1 + 12\,e}}{2e} = 1,25046$	$x = = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 5\,e}}{2e} = \frac{1 + \sqrt{1 + 20\,e}}{2e} = 1,41087$	$x = = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 4\,e}}{2e} = \frac{1 + \sqrt{1 + 16\,e}}{2e} = 1,55260$	$x = = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 6\,e}}{2e} = \frac{1 + \sqrt{1 + 24\,e}}{2e} = 1,68097$

Tehtävä 4

(a) Ongelmaa voidaan mallintaa 1. kertaluvun lineaarisella differenssiyhtälöllä

$$x_{n+1} = d + r\, x_n,$$

jossa r on talvehtivien kalojen osuus. Merkitään aloitusvuoden 0 kalojen määrää x_0. Saadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= d + rx_0 \\ x_2 &= d + rx_1 = d + dr + r^2 x_0 \\ x_3 &= d + rx_2 = d + dr + dr^2 + r^3 x_0 \end{aligned}$$

	A	B	C	D
	$r = 1 - \frac{69}{100}$	$r = 1 - \frac{71}{100}$	$r = 1 - \frac{73}{100}$	$r = 1 - \frac{76}{100}$
	$d = 7100$	$d = 6100$	$d = 5200$	$d = 4300$
	$x_0 = 2100,0$	$x_0 = 2200,0$	$x_0 = 2300,0$	$x_0 = 2400,0$
	$x_1 = 7751,0$	$x_1 = 6738,0$	$x_1 = 5821,0$	$x_1 = 4876,0$
	$x_2 = 9502,8$	$x_2 = 8054,0$	$x_2 = 6771,7$	$x_2 = 5470,2$
	$x_3 = 10045,9$	$x_3 = 8435,7$	$x_3 = 7028,4$	$x_3 = 5612,9$

(b) Selvästi $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, koska $|r| < 1$, joten tarkastelemalla x_n lauseketta:

$$\begin{aligned} x_n &= d + dr + dr^2 + \cdots + dr^{n-1} + x_0\, r^n && (21) \\ &= d\frac{1-r^n}{1-r} + r^n x_0 && (22) \\ x_\infty &:= \lim_{n\to\infty} x_n && (23) \\ &= \lim_{n\to\infty} d \left[\frac{1-r^n}{1-r}\right] + r^n x_0 && (24) \\ &= \frac{d}{1-r} && (25) \end{aligned}$$

	A	B	C	D
	$x_\infty \approx 10289,8$	$x_\infty \approx 8591,5$	$x_\infty \approx 7123,3$	$x_\infty \approx 5657,9$

(b) Oletetaan, että on olemassa tasapainotila $x_\infty = \lim_{x\to\infty} x_n$. Tällöin

$$x_n = d + r\, x_{n-1} \quad \Rightarrow \quad x_\infty = d + r\, x_\infty \quad \Leftrightarrow \quad x_\infty = \frac{d}{1-r}.$$

	A	B	C	D
	$x_\infty \approx 10289,8$	$x_\infty \approx 8591,5$	$x_\infty \approx 7123,3$	$x_\infty \approx 5657,9$

Tehtävä 5

Merkitään lukuja a ja b, jossa oletetaan $a \geq b$. Tällöin

$$\begin{cases} (1000\, a + b) = 6\ (1000\, b + a) \\ a + b = 999 \end{cases} \tag{26}$$

josta $b = 999 - a$,

$$\begin{aligned}
1000a + (999 - a) &= 6(1000(999 - a) + a) && (27)\\
999a + 999 &= 6(1000 \cdot 999 - 999a) && (28)\\
a + 1 &= 6(1000 - a) && (29)\\
7a &= 5999 && (30)\\
a &= 857 \qquad \Rightarrow b = 142. && (31)
\end{aligned}$$

Tehtävä 6

Viitaten oheisiin kuviin, merkitään $a = |\overline{OA}|$, $b = |\overline{OB}| = |\overline{OP}|$, $c = |\overline{OC}|$, $u = \overline{CQ}/|\overline{CQ}|$, $v = \overline{OC}/|\overline{OC}| = \overline{OP}/|\overline{OP}|$. Edelleen olkoon $\alpha = \angle BOC$ ja $\beta = \angle AOB$. Kummassakin tapauksessa varjon pituus on kaaren PB pituus $\alpha\, b$ ja saamme kulmille $\gamma = \angle AOC$ ja komplementille $\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$$u \cdot v = 1 \cdot \cos(\gamma') = \sin(\gamma).$$

$$\cos\beta = \frac{c}{b}\cos\gamma, \qquad \alpha = \gamma - \beta. \tag{32}$$

Jos

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta < 1. \tag{33}$$

tilanne on (i) ja $a = c\cos\gamma = b\cos\beta$. Jos $a \geq b$, olemme tilanteessa (ii), α saadaan lausekeesta $\cos\alpha = b/c$.

Konkreettisesti: $\overline{OP} = (3;0;4)$, $\overline{OQ} = (18;-6;17)$, $b = r = 5$, $c = 5 + r = 10$, $\overline{OC} = \frac{c}{b}\overline{OP} = 2\overline{OP} = (6;0;8)$, $\overline{CQ} = \overline{OQ} - \overline{OC} = (12;-6;9)$, $|\overline{CQ}|^2 = 261$, $|\overline{CQ}| \approx 16,155$, $\overline{CQ} \cdot \overline{OC} = 288$,

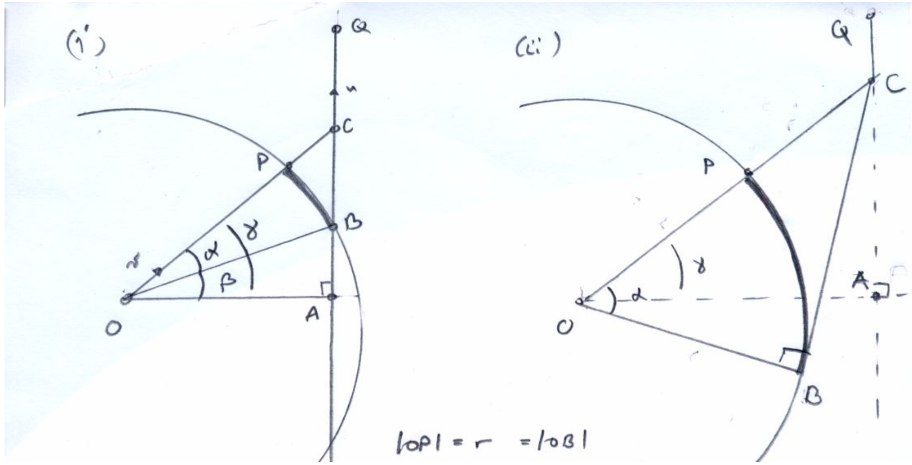
$$\sin\gamma = u \cdot v = \frac{\overline{CQ} \cdot \overline{OC}}{|\overline{CQ}|\,|\overline{OC}|} \approx 0,89134, \quad \gamma \approx 1,100.$$

Nyt (33) antaa

$$\cos\beta = (c/b)\cos\gamma \approx 0,90668 < 1$$

eli tapaus (i); $\beta \approx 0,43545$, $\alpha = \gamma - \beta \approx 0,66485$ ja varjon pituus $\alpha b \approx 3,3243$.

Vastaus a) $P = (6;0;8)$, b) varjon pituus $3,3243$.



Vaihtoehto Käyttäen aikaisempia merkintöjä ja laskuja: Piste B sijaitsee pallon pinnalla, joten $\overline{OB} = \overline{OC} - k\,\overline{CQ}$ jollekin k.

$$|\overline{OP}|^2 = |\overline{OB}|^2 = |\overline{OC} - k\,\overline{CQ}|^2 \tag{34}$$

$$b^2 = |\overline{OC}|^2 - 2k\,\overline{OC} \cdot \overline{CQ} + k^2|\overline{CQ}|^2 \tag{35}$$

$$75 - 288k + 261k^2 = 0 \tag{36}$$

$$k = 0,42117 \quad \vee\, k = 0,68227. \tag{37}$$

Lähempi piste, pienempi k, on varjon pää.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OP}}{|\overline{OB}|\,|\overline{OP}|} \tag{38}$$

$$= \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OP} - k\,\overline{CQ} \cdot \overline{OP}}{b^2} \tag{39}$$

$$= \frac{144 - 72k}{25} = 0,787017 \tag{40}$$

eli $\alpha = 0.66484$ josta kuten yllä.

Arvostelu

Ohessa julkaistavat arvosteluperiaatteet viittaavat malliratkaisuun ja kattavat tyypillisimmät tapaukset.

1) 2p+2p+2p.

   Kussakin kohdassa yksinkertainen laskuvirhe kohdasta max 1p, periaatevirhe kohdasta max 0p.

   (a) Sisäfunktion derivaatan puuttuminen tai väärä eksponentti on periaatevirhe, vakiokertoimen $(\frac{1}{2})$ puuttuminen ei ole periaatevirhe.

   (b) Polynomin kahden tai usemman termin väärä integrointi on periaatevirhe. Integrointivakiota C ei vaadita.

   (c) Loogisten konjuktioiden (tai/ja/$\wedge$/$\vee$) epäjohdonmukainen käyttö antaa osiosta korkeintaan 1p jos vastauksessa on annettu vastaus oikein (huomaa $x \leq 1 \vee x \geq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$). Pelkkä vastaus ilman perusteluja tai laskuja on 0p.

   Jos tehtävä jaetaan tapauksiin itseisarvon argumentin merkin mukaan, tulee nämä alueet olla eksplisiittisesti kytketty epäyhtälön ratkaisuun, muutoin 0p. Sieventämätön muoto $a \leq x \leq b \wedge b < x \leq c$ on hyväksyttävä.

   Ratkaistaessa tehtävää neliöönkorottamalla, muodosta (9) ilman perustelua kuten merkkikaavio 1p. Muodosta (7) ei hyvitystä.

2) 2p+4p.

   (a) Periaatevirhe – kuten binomikertoimen puuttuminen (tai muuten oleellisesti väärä kerroin), perustapauksen todennäköisyys väärä, lueteltuja riipputtomia perustapauksia puuttuu enemmän kuin yksi – osiosta 0p.

   Pieni laskuvirhe osiosta 1.

   (b) Kaikkien riippumattomien tapausten identifointi 1p, vertaa vastauksen taulukko. Jos riipputtomia perustapauksia puuttuu yksi osiosta max 3p, jos kaksi osiosta max 2p, enemmän 0p.

3) 3p+3p.

   (a) Muoto (11) on 2p, vain toinen haara tai ilman monikertoja 1p.

   (b) Kaksi logartimilauseketta yhtäsuuria muotoa (16) 1p, ratkaisuyrite (19) sieventämättäkin 2p. Oikea ratkaisu (20), jossa toinen juuri perustellusti hylätty, 3p.

4) 2p+4p.

   (a) Mikäli tulosten x_1, x_2, x_3 joukossa on yksi pieni virhe: 1p. Laskunaikainen tai lopputuloksen pyöristys kokonaisluvuksi hyväksytään.

   (b) Vastauksessa keskeistä on perustelut: relaatio kasvumalliin ja tuloksen riippumattomuus alkuarvosta x_0. Pelkkä vastaus on arvoton.

   Ensimmäisessä vaihtoehdossa yleisen x_n lauseketta vastaavan geometrisen sarjan (21) ja summan (22) muodostamisesta hyvitetään kummastakin 1p. Huomiosta $r^n \to 0$ 1p.

   Raja-arvon etsiminen iteroimalla kalakantaa tietyllä kiinnitetyllä x_0 ja toteamalla sen näyttävän konvergoivan ei anna pisteitä.

5) Kahden muuttujan yhtälön (26) muodostaminen 3p: ylempi yksin 2p, alempi yksin 0p. Mikäli muuttujana käytetään yksittästä merkkiä $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a = 100a_1 + 10a_2 + a_3$, vastaava yhtälöryhmä antaa 2p.

   Pelkkä vastaus 0p, jos explisiittisesti tarkastettu 1p.

   Ratkaisun haarukointi tai numerinen kokeilu 3p. Likiarvoyhtälöön $a \approx 6b \wedge a+b = 999$ perustuvat ratkaisut korkeintaan 3p. Yleisesti ratkaisussa, jossa ratkaisun yksikäsitteisyyttä (funktio $a \mapsto b$ on monotoninen) ei perusteella, annetaan korkeintaan 3p.

   Yhtälöpari $x + y = 999 \wedge x = 6y$ on väärä ja mikäli esiintyy voidaan numerisesta ratkaisun löytämisestä antaa korkeintaan 2p.

   Symbolisessa notaatio $(a_1a_2a_3b_1b_2b_3) = 6(b_1b_2b_3a_1a_2a_3)$ ei sellaisenaan anna pisteitä.

6) 2p+4p

   a) Osakohdassa edellytetään välivaiheiden tai perustelujen olemassaoloa.

   b) QP suuntaisen suoran lausekkeen muodostaminen +1p. Pallon ja suoran leikkauspiste B +1p tai vaihtoehtotavassa yhtälöstä (34). Kolmion OCB identifoiminen ja ehdon määrääminen α:lle (32) tai (38) +1p. Kaarenpituus perusteluineen +1p.