Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2017

Arkkitehtimatematiikan koe 22.5.2017, Ratkaisut (Sarja A)

1. a) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $|x| = 2$? (1 p.)
   b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $x^2 = 2$? (1 p.)
   c) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{1+x+3}{3} = 2$? (1 p.)
   d) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $x^2 - 4x - 16 = 2$? (1 p.)
   e) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $|x| > 2$? (1 p.)
   f) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $x + 1 < 2$? (1 p.)

Ratkaisu:

a) Yhtälö $|x| = 2$ toteutuu jos ja vain jos x on 2 tai x on -2.
Vastaus: Reaaliluvut 2 ja -2.

Sarja B: $|x| = 3$, Vastaus: 3 ja -3.
Sarja C: $|x| = 5$, Vastaus: 5 ja -5.
Sarja D: $|x| = 7$, Vastaus: 7 ja -7.

b) Yhtälö $x^2 = 2$ toteutuu jos ja vain jos x on $\sqrt{2}$ tai x on $-\sqrt{2}$.
Vastaus: Reaaliluvut $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$.

Sarja B: $x^2 = 3$, Vastaus: $\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$.
Sarja C: $x^2 = 5$, Vastaus: $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$.
Sarja D: $x^2 = 7$, Vastaus: $\sqrt{7}$ ja $-\sqrt{7}$.

c) Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{1+x+3}{3} = 2 \\
\Leftrightarrow\ & 1 + x + 3 = 3 \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\ & 1 + x + 3 = 6 \\
\Leftrightarrow\ & x + 4 = 6 \\
\Leftrightarrow\ & x = 6 - 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = 2.
\end{aligned}$$

Vastaus: Reaaliluku 2.

Sarja B: $\frac{1+x+5}{3} = 3$, Vastaus: 3.
Sarja C: $\frac{1+x+9}{3} = 5$, Vastaus: 5.
Sarja D: $\frac{1+x+13}{3} = 7$, Vastaus: 7.

d) Huomataan, että

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x - 16 = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x - 18 = 0. \end{aligned}$$

Paraabelin $y = x^2 - 4x - 18$ nollakohdat ovat

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 72}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot (4 + 18)}}{2}$$
$$= \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{4 + 18}}{2} = 2 \pm \sqrt{22}.$$

Vastaus: Reaaliluvut $2 + \sqrt{22}$ ja $2 - \sqrt{22}$.

Sarja B: $x^2 - 4x - 15 = 3$, Vastaus: $2 + \sqrt{22}$ ja $2 - \sqrt{22}$.
Sarja C: $x^2 - 4x - 13 = 5$, Vastaus: $2 + \sqrt{22}$ ja $2 - \sqrt{22}$.
Sarja D: $x^2 - 4x - 11 = 7$, Vastaus: $2 + \sqrt{22}$ ja $2 - \sqrt{22}$.

e) Epäyhtälö $|x| > 2$ toteutuu jos ja vain jos $x > 2$ tai $x < -2$.
Vastaus: Lukua 2 aidosti suuremmat ja lukua -2 aidosti pienemmät reaaliluvut.

Sarja B: $|x| > 3$, Vastaus: Lukua 3 aidosti suuremmat ja lukua -3 aidosti pienemmät reaaliluvut.
Sarja C: $|x| > 5$, Vastaus: Lukua 5 aidosti suuremmat ja lukua -5 aidosti pienemmät reaaliluvut.
Sarja D: $|x| > 7$, Vastaus: Lukua 7 aidosti suuremmat ja lukua -7 aidosti pienemmät reaaliluvut.

f) Huomataan, että

$$\begin{aligned} & x + 1 < 2 \\ \Leftrightarrow\ & x < 2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x < 1. \end{aligned}$$

Vastaus: Lukua 1 aidosti pienemmät reaaliluvut.

Sarja B: $x + 1 < 3$, Vastaus: Lukua 2 aidosti pienemmät reaaliluvut.
Sarja C: $x + 1 < 5$, Vastaus: Lukua 4 aidosti pienemmät reaaliluvut.
Sarja D: $x + 1 < 7$, Vastaus: Lukua 6 aidosti pienemmät reaaliluvut.

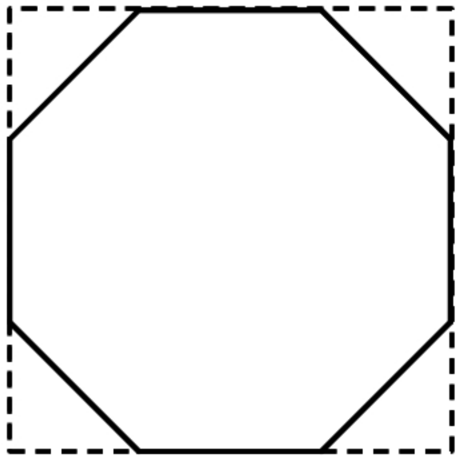
2. Neliön muotoisesta levystä leikataan jokaisesta kulmasta pois kolmio niin, että syntyy säännöllinen kahdeksankulmio.

   a) Piirrä kuva neliön sisään syntyvästä kahdeksankulmiosta. (1 p.)

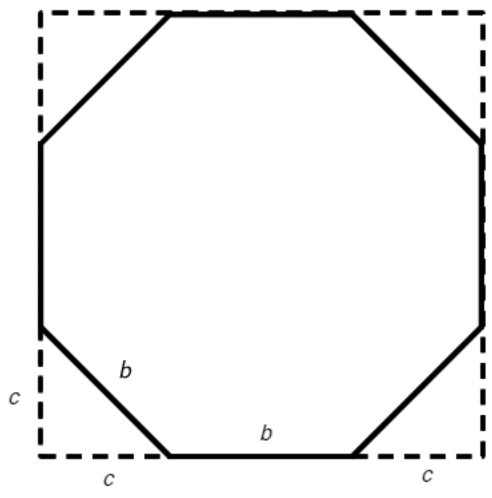
   b) Olkoon neliön sivun pituus 7 metriä. Mikä on kahdeksankulmion sivun pituus? Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. (5 p.)

Ratkaisu:

a) Kuva:



b) Olkoon kahdeksankulmion sivun pituus b ja olkoon poisleikatun kolmion sivujen pituudet b, c ja c.



Pythagoraan lauseen nojalla tiedetään, että $b^2 = c^2 + c^2$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} & b^2 = c^2 + c^2 \\ \Leftrightarrow\ & b^2 = 2c^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{b^2}{2} = c^2 \\ \Leftrightarrow\ & c = \frac{b}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Toisaalta, neliön sivun pituus $7\ \mathrm{m} = c + b + c$. Kun tähän sijoitetaan $c = \frac{b}{\sqrt{2}}$, saadaan

$$7\ \mathrm{m} = \frac{b}{\sqrt{2}} + b + \frac{b}{\sqrt{2}} = b \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + b = \Big(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\Big)b.$$

Näin ollen

$$b = \frac{7\ \mathrm{m}}{\frac{2}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{7\ \mathrm{m}}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot 7\ \mathrm{m}}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot 7\ \mathrm{m}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 7\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{2} - 7\ \mathrm{m} \approx 2{,}90\ \mathrm{m}.$$

Vastaus: Kahdeksankulmion sivun pituus on $7 \cdot \sqrt{2} - 7$ metriä. Kaksidesimaalinen likiarvo on 2,90 metriä.

Sarja B: Neliön sivun pituus on 11 metriä. Vastaus: Kahdeksankulmion sivun pituus on $11 \cdot \sqrt{2} - 11$ metriä. Kaksidesimaalinen likiarvo on 4,56 metriä.

Sarja C: Neliön sivun pituus on 5 metriä. Vastaus: Kahdeksankulmion sivun pituus on $5 \cdot \sqrt{2} - 5$ metriä. Kaksidesimaalinen likiarvo on 2,07 metriä.

Sarja D: Neliön sivun pituus on 3 metriä. Vastaus: Kahdeksankulmion sivun pituus on $3 \cdot \sqrt{2} - 3$ metriä. Kaksidesimaalinen likiarvo on 1,24 metriä.

3. Todennäköisyys sille, että tulostettava kappale vioittuu 3D-tulostimen tulostusprosessissa on $\frac{1}{6}$. Tulostettaessa useita kappaleita vioittumistodennäköisyydet ovat toisistaan riippumattomia.

   a) Mikä on todennäköisyys sille, että kolmesta tulostettavasta kappaleesta kaikki ovat ehjiä? Anna vastauksen tarkka arvo.

   (2 p.)

   b) Mikä on todennäköisyys sille, että kolmesta tulostettavasta kappaleesta ainakin yksi on ehjä? Anna vastauksen tarkka arvo.

   (2 p.)

   c) Tulostusprosessin jälkeen kappale (viallinen tai ehjä) menee jälkikäsittelyyn, missä todennäköisyys kappaleen vioittumiselle on $\frac{1}{5}$ riippumatta siitä, onko kappale vioittunut jo tulostusprosessissa. Mikä on todennäköisyys sille, että valmiista kappaleesta tulee ehjä? Anna vastauksen tarkka arvo.

   (2 p.)

Ratkaisu:

a) Todennäköisyys sille, että tulostettava kappale vioittuu tulostusprosessissa on $\frac{1}{6}$. Tämän vuoksi todennäköisyys sille, että kappale ei vioitu tulostusprosessissa on

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Tulostettaessa useita kappaleita vioittumistodennäköisyydet ovat toisistaan riippumattomia. Tämän vuoksi todennäköisyys sille, että kolmesta tulostetusta kappaleesta kaikki ovat ehjiä on

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{125}{216}.$$

Vastaus: Todennäköisyys sille, että kolmesta tulostetusta kappaleesta kaikki ovat ehjiä on $\frac{125}{216}$.

Sarja B: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{7}$. Vastaus: $\frac{216}{343}$.

Sarja C: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{5}$. Vastaus: $\frac{64}{125}$.

Sarja D: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{4}$. Vastaus: $\frac{27}{64}$.

b) Todennäköisyys sille, että tulostettava kappale vioittuu tulostusprosessissa on $\frac{1}{6}$. Tulostettaessa useita kappaleita vioittumistodennäköisyydet ovat toisistaan riippumattomia. Tämän vuoksi todennäköisyys sille, että kolmesta tulostetusta kappaleesta kaikki vioittuvat on

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{216}.$$

Näin ollen todennäköisyys sille, että kolmesta tulostetusta kappaleesta ainakin yksi on ehjä on

$$1 - \frac{1}{216} = \frac{216}{216} - \frac{1}{216} = \frac{216 - 1}{216} = \frac{215}{216}.$$

Vastaus: Todennäköisyys sille, että kolmesta tulostetusta kappaleesta ainakin yksi on ehjä on $\frac{215}{216}$.

Sarja B: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{7}$. Vastaus: $\frac{342}{343}$.

Sarja C: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{5}$. Vastaus: $\frac{124}{125}$.

Sarja D: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{4}$. Vastaus: $\frac{63}{64}$.

c) Todennäköisyys sille, että tulostettava kappale vioittuu tulostusprosessissa on $\frac{1}{6}$. Tämän vuoksi todennäköisyys sille, että kappale ei vioitu tulostusprosessissa on

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Todennäköisyys kappaleen vioittumiselle jälkikäsittelyssä on $\frac{1}{5}$ riippumatta siitä, onko kappale vioittunut jo tulostusprosessissa. Tämän vuoksi todennäköisyys sille, että kappale ei vioitu jälkikäsittelyssä on

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5 - 1}{5} = \frac{4}{5}$$

riippumatta siitä, onko kappale vioittunut jo tulostusprosessissa. Näin ollen todennäköisyys sille, että kappale ei vioitu tulostusprosessissa eikä jälkikäsittelyssä (toisin sanoen, todennäköisyys sille, että valmiista kappaleesta tulee ehjä) on

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Vastaus: Todennäköisyys sille, että valmiista kappaleesta tulee ehjä on $\frac{2}{3}$.

Sarja B: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{7}$, vioittumistodennäköisyys jälkikäsittelyssä on $\frac{1}{6}$. Vastaus: $\frac{5}{7}$.

Sarja C: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{5}$, vioittumistodennäköisyys jälkikäsittelyssä on $\frac{1}{4}$. Vastaus: $\frac{3}{5}$.

Sarja D: Tulostettavan kappaleen vioittumistodennäköisyys on $\frac{1}{4}$, vioittumistodennäköisyys jälkikäsittelyssä on $\frac{1}{3}$. Vastaus: $\frac{1}{2}$.

4. Arkkitehti K. Kansalainen omistaa hienon omakotitalon. Omakotitalon lämmittäminen suoralla sähkölämmityksellä maksaa 3 000 euroa vuodessa. Arkkitehti K. Kansalainen harkitsee ilmalämpöpumppua, jonka asentaminen maksaisi 5 000 euroa. Vaihtoehtona ilmalämpöpumpulle K. Kansalainen harkitsee maalämpöä, jonka asentaminen maksaisi 20 000 euroa. Ilmalämpöpumppu tuottaisi 25% säästön vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Maalämpö puolestaan tuottaisi 55% säästön vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Oletetaan, että yleinen kustannustaso pysyy muuttumattomana.

   a) Laske jokaisen kolmen lämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannus 10 vuoden aikana.
   (2 p.)

   b) Arkkitehti K. Kansalainen päätyy ilmalämpöpumppuun. Kuinka pitkän ajan kuluttua tämän lämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen? Entäpä, jos K. Kansalainen päätyykin maalämpöön? Kuinka pitkän ajan kuluttua tämän lämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen?
   (4 p.)

Ratkaisu:

a)

Suora sähkölämmitys:

Yhden vuoden aikana suora sähkölämmitys maksaa 3000 euroa, joten kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on

$$10 \cdot 3000 \text{ euroa} = 30000 \text{ euroa}.$$

Ilmalämpöpumppu:

Ilmalämpöpumpun asennus maksaa 5000 euroa. Toisaalta ilmalämpöpumppu tuo vuotuisiin lämmityskustannuksiin 25% säästön. Näin ollen vuotuiset kustannukset ovat

$$3000 \text{ euroa} - 0{,}25 \cdot 3000 \text{ euroa} = 3000 \text{ euroa} - 750 \text{ euroa} = 2250 \text{ euroa}.$$

Näin ollen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on

$$5000 \text{ euroa} + 10 \cdot 2250 \text{ euroa} = 27500 \text{ euroa}.$$

Maalämpö:

Maalämmön asennus maksaa 20000 euroa. Toisaalta ilmalämpöpumppu tuo vuotuisiin lämmityskustannuksiin 55% säästön. Näin ollen vuotuiset kustannukset ovat

$$3000 \text{ euroa} - 0{,}55 \cdot 3000 \text{ euroa} = 3000 \text{ euroa} - 1650 \text{ euroa} = 1350 \text{ euroa}.$$

Näin ollen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on

$$20000 \text{ euroa} + 10 \cdot 1350 \text{ euroa} = 33500 \text{ euroa}.$$

Vastaus: Suoran sähkölämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 30 000 euroa, Ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 27 500 euroa ja maalämmöllä kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 33 500 euroa.

Sarja B: Suora sähkölämmitys maksaa 2 500 euroa vuodessa. Ilmalämpöpumpun asennus maksaa 7 000 euroa ja tuo 25% säästöä vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Maalämmön asennus maksaa 18 000 euroa ja tuo 55% säästöä vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Vastaus: Suoran sähkölämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 25 000 euroa, ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 25 750 euroa ja maalämmöllä kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 29 250 euroa.

Sarja C: Suora sähkölämmitys maksaa 3 500 euroa vuodessa. Ilmalämpöpumpun asennus maksaa 7 000 euroa ja tuo 25% säästöä vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Maalämmön asennus maksaa 18 000 euroa ja tuo 60% säästöä vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Vastaus: Suoran sähkölämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 35 000 euroa, ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 33 250 euroa ja maalämmöllä kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 32 000 euroa.

Sarja D: Suora sähkölämmitys maksaa 3 000 euroa vuodessa. Ilmalämpöpumpun asennus maksaa 7 000 euroa ja tuo 30% säästöä vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Maalämmön asennus maksaa 20 000 euroa ja tuo 60% säästöä vuotuisiin lämmityskustannuksiin. Vastaus: Suoran sähkölämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 30 000 euroa, ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 28 000 euroa ja maalämmöllä kokonaiskustannus 10 vuoden aikana on 32 000 euroa.

b)

Ilmalämpöpumppu:

Suora sähkölämmitys maksaa 3000 euroa vuodessa. Ilmalämpöpumpun asennus maksaa 5000 euroa ja vuotuiset kustannukset ovat

$$3000 \text{ euroa} - 0{,}25 \cdot 3000 \text{ euroa} = 3000 \text{ euroa} - 750 \text{ euroa} = 2250 \text{ euroa}.$$

Olkoon x vuosien lukumäärä. Kokonaiskustannukset ovat samat, kun $3000 \text{ euroa} \cdot x = 5000 \text{ euroa} + 2250 \text{ euroa} \cdot x$. Koska

$$3000x = 5000 + 2250x \Leftrightarrow 750x = 5000 \Leftrightarrow x = \frac{5000}{750},$$

$\frac{5000}{750} = \frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3}$ ja koska $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, niin kokonaiskustannukset ovat samat kun aikaa kuluu 6 vuotta ja 8 kuukautta.

Maalämpö:

Suora sähkölämmitys maksaa 3000 euroa vuodessa. Maalämmön asennus maksaa 20000 euroa ja vuotuiset kustannukset ovat

$$3000 \text{ euroa} - 0{,}55 \cdot 3000 \text{ euroa} = 3000 \text{ euroa} - 1650 \text{ euroa} = 1350 \text{ euroa}.$$

Olkoon x vuosien lukumäärä. Kokonaiskustannukset ovat samat, kun 3000 euroa$\cdot x =$ 20000 euroa$+$ 1350 euroa $\cdot\, x$. Koska

$$3000x = 20000 + 1350x \Leftrightarrow 1650x = 20000 \Leftrightarrow x = \frac{20000}{1650},$$

$\frac{20000}{1650} = \frac{400}{33} = 12 + \frac{4}{33}$ ja koska $\frac{4}{33} = \frac{12\cdot 4}{12\cdot 33} = \frac{(12\cdot 4)/33}{12} \approx \frac{1{,}4545}{12}$, niin kokonaiskustannukset ovat samat kun aikaa kuluu noin 12 vuotta ja 1,45 kuukautta.

Vastaus: Ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 6 vuotta ja 8 kuukautta. Maalämmöllä lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 12 vuotta ja yksi kuukausi.

Sarja B: Vastaus: Ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 11 vuotta ja 2 kuukautta. Maalämmöllä lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 13 vuotta ja yksi kuukausi.

Sarja C: Vastaus: Ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 8 vuotta. Maalämmöllä lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 8 vuotta ja 7 kuukautta.

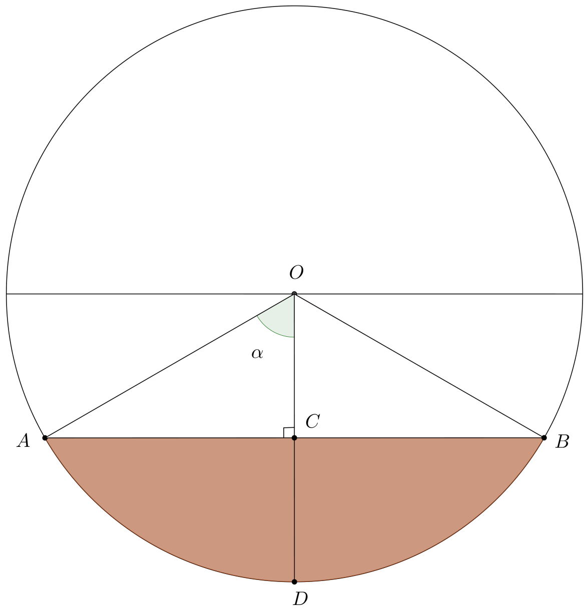
Sarja D: Vastaus: Ilmalämpöpumpulla lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 7 vuotta ja 9 kuukautta. Maalämmöllä lämmityksen kokonaiskustannus alittaa pelkän suoran sähkölämmitysvaihtoehdon kokonaiskustannuksen kun aikaa kuluu noin 11 vuotta ja yksi kuukausi.

5. Omakotitalossa ollaan vaihtamassa lämmitysjärjestelmää. Omistaja haluaa asentaa uuden järjestelmän vasta, kun öljysäiliössä oleva öljy on käytetty loppuun. Maan alle vaakasuoraan asennetun suoran ympyrälieriön muotoisen säiliön tilavuus on 3 000 litraa ja pääty-ympyröiden halkaisija on 100 cm. Öljypinnan korkeus on, säiliön alimmasta kohdasta mitattuna, 20 cm. Kuinka moneksi viikoksi öljy riittää, kun öljyä kuluu 70 litraa viikossa?

(6 p.)

Ratkaisu:

Lasketaan jäljellä olevan öljyn määrä.



Jäljellä olevan öljyn osuus säiliön kokonaistilavuudesta on sama kuin poikkileikkausympyrän segmentin AB pinta-alan osuus koko ympyrän pinta-alasta. Segmentin AB pinta-ala = sektorin OAB pinta-ala - kolmion OAB pinta-ala.

Sektorin pinta-ala:

Koska ympyrän halkaisija on 100 cm ja öljypinnan korkeus on 20 cm, niin pituudet $|OD| = |OA| = 50$ cm, $|OC| = (50 - 20)$ cm $= 30$ cm ja $|CD| = 20$ cm.

Suorakulmaisesta kolmiosta OAC saadaan ratkaistua

$$\cos\alpha = \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

ja tästä edelleen

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13\,^\circ.$$

Sektorin OAB keskuskulma on 2α, joten sektorin pinta-ala

$$A_{sektori} = \frac{2\alpha}{360\,^\circ}\pi \cdot (50 \text{ cm})^2 = 2318{,}2336 \text{ cm}^2.$$

Kolmion pinta-ala:

Suorakulmaisesta kolmiosta OAC saadaan Pythagoraan lauseen perusteella ratkaistua

$$|AC| = \sqrt{50^2 - 30^2} \text{ cm} = 40 \text{ cm}.$$

Nyt kolmion OAB pinta-ala

$$A_{kolmio} = \frac{1}{2}|AB||OC| = \frac{1}{2}2|AC||OC| = 40 \cdot 30 \text{ cm}^2 = 1200 \text{ cm}^2.$$

Segmentin pinta-ala:

Segmentin ala $A_{segmentti} = A_{sektori} - A_{kolmio}$.

$$\text{Öljyn määrä} = \frac{\text{Segmentin ala}}{\text{Poikkileikkausympyrän ala}} \cdot \text{Säiliön kokonaistilavuus}$$

$$= \frac{A_{sektori} - A_{kolmio}}{\pi \cdot |OD|^2} \cdot 3000 \text{ l} = \frac{2318{,}2336 \text{ cm}^2 - 1200 \text{ cm}^2}{\pi \cdot (50 \text{ cm})^2} \cdot 3000 \text{ l} = 427{,}1338 \text{ l}$$

Öljyä kuluu viikossa 70 litraa, joten öljyä riittää $\frac{427{,}1338}{70} \approx 6{,}102$ viikoksi.

Vastaus: Öljyä riittää kuudeksi viikoksi.

Sarja B: Viikossa kuluu 60 litraa öljyä. Vastaus: Öljyä riittää seitsemäksi viikoksi.

Sarja C: Viikossa kuluu 80 litraa öljyä. Vastaus: Öljyä riittää viideksi viikoksi.

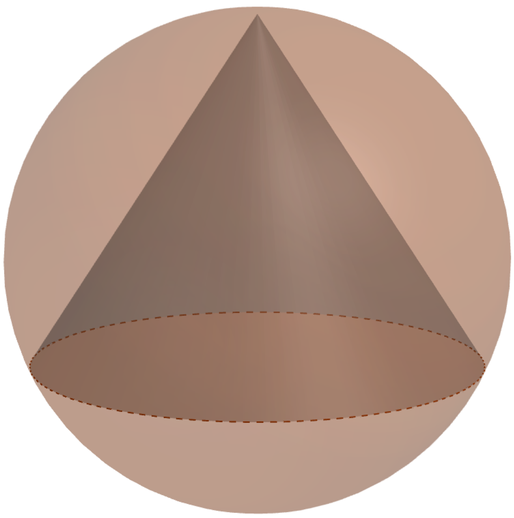
Sarja D: Viikossa kuluu 50 litraa öljyä. Vastaus: Öljyä riittää kahdeksaksi viikoksi.

6. Pallon P säde on 6,25 cm. Pallon P sisään asetetaan suora ympyräkartio K (pohjaympyrän säde r, korkeus h) siten, että kartion K kärki ja pohjaympyrän kehä ovat pallon P sisäpinnalla. Piirrä kuva. Mikä on suoran ympyräkartion K suurin mahdollinen tilavuus? Anna vastauksen tarkka arvo.

(6 p.)

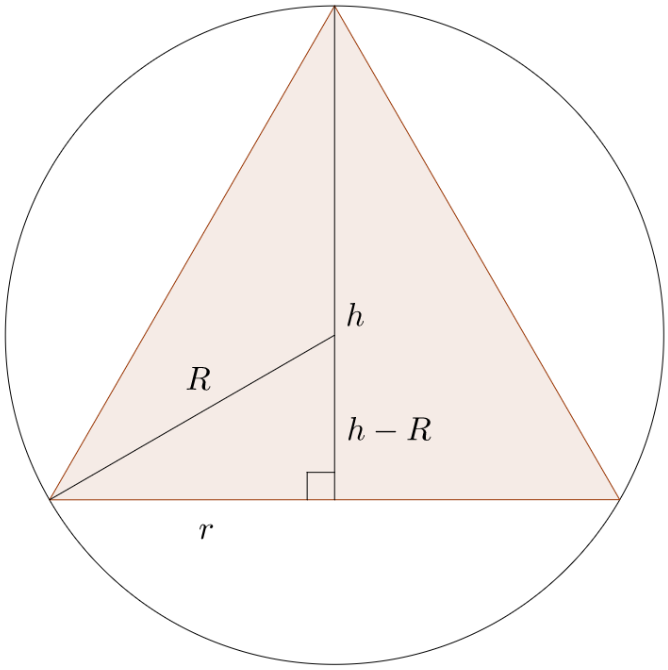
Ratkaisu:

Kuva (1 p.):



Tilavuus (5 p.):

Olkoon suoran ympyräkartion K pohjaympyrän säde r sekä korkeus h.



Leikkauskuviosta saadaan Pythagoraan lauseella

$$(6{,}25\,\text{cm})^2 = (h - 6{,}25\,\text{cm})^2 + r^2,$$

joten

$$r^2 = (6{,}25\,\text{cm})^2 - (h - 6{,}25\,\text{cm})^2 = (6{,}25\,\text{cm})^2 - h^2 + 2 \cdot 6{,}25\,\text{cm} \cdot h - (6{,}25\,\text{cm})^2 = 12{,}5\,\text{cm} \cdot h - h^2.$$

Suoran ympyräkartion tilavuudelle pätee

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(12{,}5\,\text{cm} \cdot h - h^2) \cdot h = \frac{\pi}{3}(12{,}5\,\text{cm} \cdot h^2 - h^3) = V(h).$$

Tilavuus on suurin joko suljetun välin päätepisteissä $h = 0\,\text{cm}$, $h = 12{,}5\,\text{cm}$ tai derivaatan nollakohdassa. Koska $V(0\,\text{cm}) = V(12{,}5\,\text{cm}) = 0\,\text{cm}^3$, suurin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdassa. Tilavuuden derivaatta on

$$V'(h) = \tfrac{\pi}{3}(25\,\text{cm} \cdot h - 3h^2).$$

Tarkastellaan derivaatan nollakohtia:

$$\tfrac{\pi}{3}(25\,\text{cm} \cdot h - 3h^2) = 0\,\text{cm}^2 \;\Leftrightarrow\; (25\,\text{cm} \cdot h - 3h^2) = 0\,\text{cm}^2 \;\Leftrightarrow\; h(25\,\text{cm} - 3h) = 0\,\text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow\; h = 0\,\text{cm} \text{ tai } 25\,\text{cm} - 3h = 0 \;\Leftrightarrow\; h = 0\,\text{cm} \text{ tai } h = \tfrac{25}{3}\,\text{cm}.$$

Näin ollen suoran ympyräkartion K tilavuuden suurin mahdollinen arvo on

$$V\left(\frac{25}{3}\,\text{cm}\right) = \frac{\pi}{3}\left(12{,}5\,\text{cm} \cdot \left(\frac{25}{3}\,\text{cm}\right)^2 - \left(\frac{25}{3}\,\text{cm}\right)^3\right) = \frac{15625\pi}{162}\,\text{cm}^3.$$

Vastaus: Ympyräkartion K suurin mahdollinen tilavuus on $\frac{15625\pi}{162}\,\text{cm}^3$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.