Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2017

Insinöörivalinnan matematiikan koe 30.5.2017, Ratkaisut (Sarja A)

1. a) Lukujen 9, 0, 3 ja x keskiarvo on 2. Määritä x. (1 p.)

   b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $|x| + 1 = 3$? (1 p.)

   c) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $x^2 = 2$? (1 p.)

   d) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $|x| > 2$? (1 p.)

   e) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $e^x = 3e^{3x}$? (1 p.)

   f) Olkoon $\vec{v} = 2\vec{\mathrm{i}} + 3\vec{\mathrm{j}}$ tason vektori. Mikä parametrin $k \in \mathbb{R}$ arvon tulee olla, jotta vektori $\vec{u} = \vec{\mathrm{i}} + k\vec{\mathrm{j}}$ on kohtisuorassa vektoria $\vec{v}$ vastaan? (1 p.)

Ratkaisu:

a) Huomataan, että

$$
\begin{aligned}
& \frac{9+0+3+x}{4} = 2 \\
\Leftrightarrow\ & 9+0+3+x = 4 \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\ & 12 + x = 8 \\
\Leftrightarrow\ & x = 8 - 12 \\
\Leftrightarrow\ & x = -4.
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = -4$.

Sarja B: Lukujen 7, 0, 6 ja x keskiarvo on 2. Määritä x. Vastaus: $x = -5$.

Sarja C: Lukujen 8, 0, 7 ja x keskiarvo on 2. Määritä x. Vastaus: $x = -7$.

Sarja D: Lukujen 10, 0, 4 ja x keskiarvo on 2. Määritä x. Vastaus: $x = -6$.

b) Huomataan, että $|x| + 1 = 3 \ \Leftrightarrow |x| = 3 - 1 = 2$. Yhtälö $|x| = 2$ toteutuu jos ja vain jos x on 2 tai x on -2.

Vastaus: Reaaliluvut 2 ja -2.

Sarja B: $|x| + 1 = 6$, Vastaus: 5 ja -5.

Sarja C: $|x| + 1 = 8$, Vastaus: 7 ja -7.

Sarja D: $|x| + 1 = 4$, Vastaus: 3 ja -3.

c) Yhtälö $x^2 = 2$ toteutuu jos ja vain jos x on $\sqrt{2}$ tai x on $-\sqrt{2}$.
Vastaus: Reaaliluvut $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$.

Sarja B: $x^2 = 5$, Vastaus: $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$.

Sarja C: $x^2 = 7$, Vastaus: $\sqrt{7}$ ja $-\sqrt{7}$.

Sarja D: $x^2 = 3$, Vastaus: $\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$.

d) Epäyhtälö $|x| > 2$ toteutuu jos ja vain jos $x > 2$ tai $x < -2$.
Vastaus: Lukua 2 aidosti suuremmat ja lukua -2 aidosti pienemmät reaaliluvut.

Sarja B: $|x| > 5$, Vastaus: Lukua 5 aidosti suuremmat ja lukua -5 aidosti pienemmät reaaliluvut.
Sarja C: $|x| > 7$, Vastaus: Lukua 7 aidosti suuremmat ja lukua -7 aidosti pienemmät reaaliluvut.
Sarja D: $|x| > 3$, Vastaus: Lukua 3 aidosti suuremmat ja lukua -3 aidosti pienemmät reaaliluvut.

e) Koska

$$e^x = 3e^{3x} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^x}_{>0}(1 - 3e^{2x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 3e^{2x} = 0$$
$$\Leftrightarrow\; e^{2x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow\; 2x = \ln(\frac{1}{3}) \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}\ln(3),$$

niin ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $e^x = 3e^{3x}$, on $-\frac{1}{2}\ln(3)$.
Vastaus: Reaaliluku $x = -\frac{1}{2}\ln(3)$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

f) Vektorit $\vec{v}$ ja $\vec{u}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos ja vain jos niiden välinen pistetulo on 0. Pistetulo

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (2\vec{\mathrm{i}} + 3\vec{\mathrm{j}}) \cdot (\vec{\mathrm{i}} + k\vec{\mathrm{j}}) = 2 + 3k.$$

Koska $2 + 3k = 0$, jos ja vain jos $k = -\frac{2}{3}$, parametrin k arvon tulee olla $-\frac{2}{3}$.
Vastaus: Vektori $\vec{u}$ on kohtisuorassa vektoria $\vec{v}$ vastaan, kun parametrin k arvo on $-\frac{2}{3}$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

2. Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $x^2 - 1 + |2x - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{2}$? (6 p.)

Ratkaisu:

Jaetaan ongelma kahteen tapaukseen.

Tapaus 1: Oletetaan, että

$$2x - \frac{3}{2} \geq 0.$$

Tällöin

$$x \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

ja tarkasteltava epäyhtälö on

$$x^2 - 1 + 2x - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Kun vähennetään epäyhtälöstä puolittain $\frac{1}{2}$, niin saadaan

$$x^2 - 1 + 2x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Paraabelin

$$y = x^2 - 1 + 2x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = x^2 + 2x - 3$$

nollakohdat ovat

$$\frac{-2+\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=1$$

ja

$$\frac{-2-\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=-3.$$

Koska kysessä on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälö

$$x^2-1+2x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\leq 0$$

toteutuu, kun $-3\leq x\leq 1$. Toisaalta oletuksesta $2x-\frac{3}{2}\geq 0$ seurasi, että $x\geq\frac{3}{4}$. Täten $\frac{3}{4}\leq x\leq 1$.

Tapaus 2: Oletetaan, että

$$2x-\frac{3}{2}<0.$$

Tällöin

$$x<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

ja tarkasteltava epäyhtälö on

$$x^2-1-2x+\frac{3}{2}\leq\frac{1}{2}.$$

Kun vähennetään epäyhtälöstä puolittain $\frac{1}{2}$, niin saadaan

$$x^2-1-2x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\leq 0.$$

Paraabelin

$$y=x^2-1-2x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=x^2-2x$$

nollakohdat ovat

$$\frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1}=2$$

ja

$$\frac{-(-2)-\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1}=0.$$

Koska kysessä on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälö

$$x^2-1-2x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\leq 0$$

toteutuu, kun $0\leq x\leq 2$. Toisaalta oletuksesta $2x-\frac{3}{2}<0$ seurasi, että $x<\frac{3}{4}$. Täten $0\leq x<\frac{3}{4}$.

Kun yhdistetään tapaukset 1 ja 2, saadaan $0\leq x\leq 1$.

Vastaus: Epäyhtälö $x^2-1+|2x-\frac{3}{2}|\leq\frac{1}{2}$ toteutuu, kun $0\leq x\leq 1$.

Sarja B: $x^2-3+|2x-\frac{5}{2}|\leq\frac{5}{2}$, Vastaus: $-1\leq x\leq 2$.

Sarja C: $x^2-\frac{3}{2}+|3x-4|\leq\frac{5}{4}$, Vastaus: $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$.

Sarja D: $x^2-2+|3x-4|\leq\frac{3}{4}$, Vastaus: $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$.

3. Eräässä testissä mitattiin 3000:n LED-lampun elinikää L. Mittaustulosten perusteella lamppujen elinikä L jakautui seuraavasti:

Elinikä (h)	Lamppujen lukumäärä
$0 \leq L < 2000$	176
$2000 \leq L < 4000$	393
$4000 \leq L < 6000$	674
$6000 \leq L < 8000$	1311
$8000 \leq L$	446

a) Poimitaan testatuista lampuista satunnaisesti yksi. Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä testissä oli vähintään 6000 tuntia? Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

(1 p.)

b) Poimitaan vähintään 2000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Mikä on todennäköisyys sille, että vähintään 2000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä testissä oli vähintään 6000 tuntia? Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

(2 p.)

c) Poimitaan ensin vähintään 2000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Tämän jälkeen poimitaan vähintään 4000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Ensin poimittua lamppua ei voida ottaa uudelleen. Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellaiset kaksi lamppua, jotka hajosivat ennen 6000 tunnin ikää? Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

(3 p.)

Ratkaisu:

a) Lamppuja, jotka kestivät vähintään 6000 tuntia on yhteensä $1311 + 446 = 1757$ kpl. Todennäköisyys sille, että poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä testissä oli vähintään 6000 tuntia on näin ollen $\frac{1757}{3000} \approx 0{,}59$.

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{1757}{3000} \approx 0{,}59$.

Sarja B: Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä oli vähintään 4000 tuntia? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{2431}{3000} \approx 0{,}81$.

Sarja C: Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä oli vähintään 6000 tuntia? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{1757}{3000} \approx 0{,}59$.

Sarja D: Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä oli vähintään 2000 tuntia? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{2824}{3000} \approx 0{,}94$.

b) Lamppuja, jotka kestivät vähintään 2000 tuntia on yhteensä $393 + 674 + 1311 + 446 = 2824$ kpl. Lamppuja, jotka kestivät vähintään 6000 tuntia on yhteensä $1311 + 446 = 1757$ kpl. Todennäköisyys sille, että vähintään 2000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä testissä oli vähintään 6000 tuntia on näin ollen $\frac{1757}{2824} \approx 0{,}62$.

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{1757}{2824} \approx 0{,}62$.

Sarja B: Mikä on todennäköisyys sille, että vähintään 2000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä oli vähintään 4000 tuntia? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{2431}{2824} \approx 0{,}86$.

Sarja C: Mikä on todennäköisyys sille, että vähintään 4000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä oli vähintään 8000 tuntia? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{446}{2431} \approx 0{,}18$.

Sarja D: Mikä on todennäköisyys sille, että vähintään 6000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta poimitaan sellainen lamppu, jonka elinikä oli vähintään 8000 tuntia? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{446}{1757} \approx 0{,}25$.

c) Kysytyn kaltaiset lamput poimitaan, kun i) poimitaan ensin vähintään 2000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta lamppu, joka kesti alle 4000 tuntia ja sen jälkeen poimitaan vähintään 4000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta lamppu, joka kesti alle 6000 tuntia ja kun ii) poimitaan ensin vähintään 2000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta lamppu, joka kesti vähintään 4000 tuntia ja alle 6000 tuntia ja sen jälkeen poimitaan jäljelle jääneiden vähintään 4000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta lamppu, joka kesti alle 6000 tuntia.

Lamppuja, jotka kestivät vähintään 2000 tuntia on yhteensä $393 + 674 + 1311 + 446 = 2824$ kpl. Näistä alle 4000 tuntia kesti 393 kpl. Vähintään 2000 tuntia kestäneistä lampuista 674 kpl kesti vähintään 4000, mutta alle 6000 tuntia. Lamppuja, jotka kestivät vähintään 4000 tuntia on yhteensä $674 + 1311 + 446 = 2431$ kpl. Näistä alle 6000 tuntia kesti 674 kpl. Jos poimitaan ensiksi vähintään 2000 tuntia kestäneiden lamppujen joukosta lamppu, joka kesti vähintään 4000 tuntia ja alle 6000 tuntia, niin jäljelle jää 2824-1 kpl lamppuja, jotka kestivät vähintään 4000 tuntia. Näistä alle 6000 tuntia kesti $674 - 1$ kpl. Täten kysytty todennäköisyys on

$$\frac{393}{2824} \cdot \frac{674}{2431} + \frac{674}{2824} \cdot \frac{673}{2430} \approx 0{,}10.$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{393}{2824} \cdot \frac{674}{2431} + \frac{674}{2824} \cdot \frac{673}{2430} \approx 0{,}10$.

Sarja B: Poimitaan ensin vähintään 4000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Tämän jälkeen poimitaan vähintään 6000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Ensin poimittua lamppua ei voida ottaa uudelleen. Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellaiset kaksi lamppua, jotka hajosivat ennen 8000 tunnin ikää? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{674}{2431} \cdot \frac{1311}{1757} + \frac{1311}{2431} \cdot \frac{1310}{1756} \approx 0{,}61$.

Sarja C: Poimitaan ensin vähintään 4000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Tämän jälkeen poimitaan vähintään 6000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Ensin poimittua lamppua ei voida ottaa uudelleen. Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellaiset kaksi lamppua, jotka hajosivat ennen 8000 tunnin ikää? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{674}{2431} \cdot \frac{1311}{1757} + \frac{1311}{2431} \cdot \frac{1310}{1756} \approx 0{,}61$.

Sarja D: Poimitaan ensin vähintään 2000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Tämän jälkeen poimitaan vähintään 4000 tuntia kestäneistä lampuista satunnaisesti yksi. Ensin poimittua lamppua ei voida ottaa uudelleen. Mikä on todennäköisyys sille, että poimitaan sellaiset kaksi lamppua, jotka hajosivat ennen 6000 tunnin ikää? Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{393}{2824} \cdot \frac{674}{2431} + \frac{674}{2824} \cdot \frac{673}{2430} \approx 0{,}10$.

4. Oletetaan, että f ja g ovat jatkuvia funktioita välillä $[-1, 1]$. Määritellään

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Olkoot $f(x) = x$ ja $g(x) = x^3 - ax$, missä $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Millä vakion a arvolla tai arvoilla $\langle f, g \rangle = 0$? (6 p.)

Ratkaisu:

Tarkastellaan integraalia

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x(x^3 - ax)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (x^4 - ax^2)\,\mathrm{d}x = \Big|_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{5}x^5 - \frac{a}{3}x^3\Big) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{a}{3} - (\frac{1}{5} \cdot (-1) - \frac{a}{3} \cdot (-1)) = \frac{1}{5} - \frac{a}{3} + \frac{1}{5} - \frac{a}{3} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2a}{3} = \frac{6}{15} - \frac{10a}{15} = \frac{6 - 10a}{15}.\end{aligned}$$

Koska

$$\frac{6 - 10a}{15} = 0 \;\Leftrightarrow\; 6 - 10a = 0 \;\Leftrightarrow\; 10a = 6 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

niin $\langle f, g \rangle = 0$ silloin ja vain silloin, kun $a = \frac{3}{5}$.

Vastaus: $\langle f, g \rangle = 0$ silloin ja vain silloin, kun $a = \frac{3}{5}$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

5. Tarkastellaan y-akselin suuntaista janaa, jonka toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 4$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$.

   a) Mikä on janan pituus muuttujan x funktiona? (2 p.)

   b) Millä muuttujan x arvoilla janan pituus on pienin? Anna vastauksen tarkka arvo. (3 p.)

   c) Mikä on lyhimmän janan pituus? Anna vastauksen tarkka arvo. (1 p.)

Ratkaisu:

a) Huomataan, että

$$x^2 + 4 \geq 4 > \sqrt{2} \geq \sqrt{2}\sin(x^2),$$

joten paraabeli on aina toisen käyrän yläpuolella. Muuttujaan x liittyvän janan päätepisteet ovat $(x, x^2 + 4)$ ja $(x, \sqrt{2}\sin(x^2))$. Päätepisteiden välinen etäisyys on

$$f(x) = \sqrt{|x - x|^2 + |(x^2 + 4) - \sqrt{2}\sin(x^2)|^2} = x^2 + 4 - \sqrt{2}\sin(x^2).$$

Vastaus: Janan pituus muuttujan x funktiona on $f(x) = x^2 + 4 - \sqrt{2}\sin(x^2)$.

Sarja B: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 3$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituus muuttujan x funktiona on $f(x) = x^2 + 3 - \sqrt{2}\sin(x^2)$.

Sarja C: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 6$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituus muuttujan x funktiona on $f(x) = x^2 + 6 - \sqrt{2}\sin(x^2)$.

Sarja D: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 5$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituus muuttujan x funktiona on $f(x) = x^2 + 5 - \sqrt{2}\sin(x^2)$.

b) Kohdassa $x = 0$ janan pituus on $f(0) = 0^2 + 4 - \sqrt{2}\sin(0^2) = 4$. Kun $|x| \geq 2$, niin paraabelin y-koordinaatti on vähintään $2^2 + 4 = 8$ ja toisen käyrän y-koordinaatti on korkeintaan $\sqrt{2}$, joten tällöin

$$f(x) \geq (2^2 + 4) - \sqrt{2} > 8 - \sqrt{2} > 4 = f(0).$$

Täten lyhimmän janan täytyy löytyä väliltä $[-2, 2]$.

Koska f on jatkuva ja derivoituva välillä $[-2, 2]$, löytyy janan pituuden minimiarvo derivaatan nollakohdasta tai välin $[-2, 2]$ päätepisteestä. Edellä lasketun arvion perusteella $f(\pm 2) > f(0)$, joten funktion f minimiarvo ei voi löytyä välin $[-2, 2]$ kummastakaan päätepisteestä.

Etsitään derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 2x - \sqrt{2}\cos(x^2) \cdot 2x = 2x(1 - \sqrt{2}\cos(x^2)).$$

Nähdään, että $f'(x) = 0$, kun $x = 0$ tai $1 - \sqrt{2}\cos(x^2) = 0$. Jälkimmäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $\cos(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, joka toteutuu kun $x^2 = \pm\pi/4 + 2\pi \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että $x^2 = \pm\pi/4 + 2\pi \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$, voi päteä vain, kun $n \geq 0$.

Derivaatan nollakohdista välillä $[-2, 2]$ ovat vain $x = 0$ sekä yhtälön $x^2 = \pi/4$ ratkaisut. Yhtälön $x^2 = \pi/4$ ratkaisut ovat $x = \pm\sqrt{\pi}/2$.

Lasketaan janan pituus välillä $[-2, 2]$ olevissa derivaatan nollakohdissa:

$$\begin{aligned}
f(-\sqrt{\pi}/2) &= (-\sqrt{\pi}/2)^2 + 4 - \sqrt{2}\sin((-\sqrt{\pi}/2)^2) = \pi/4 + 4 - \sqrt{2}\sin(\pi/4) \\
&= \pi/4 + 4 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi/4 + 4 - 1 = \pi/4 + 3, \\
f(\sqrt{\pi}/2) &= (\sqrt{\pi}/2)^2 + 4 - \sqrt{2}\sin((\sqrt{\pi}/2)^2) = \pi/4 + 4 - \sqrt{2}\sin(\pi/4) \\
&= \pi/4 + 4 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi/4 + 4 - 1 = \pi/4 + 3
\end{aligned}$$

ja

$$f(0) = 0^2 + 4 - \sqrt{2}\sin(0) = 4 > \pi/4 + 3.$$

Janan pituus on siis pienin pisteissä $x = \pm\sqrt{\pi}/2$.

Vastaus: Janan pituus on pienin pisteissä $x = \sqrt{\pi}/2$ ja $x = -\sqrt{\pi}/2$.

Sarja B: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 3$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituus on pienin pisteissä $x = \sqrt{\pi}/2$ ja $x = -\sqrt{\pi}/2$.

Sarja C: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 6$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituus on pienin pisteissä $x = \sqrt{\pi}/2$ ja $x = -\sqrt{\pi}/2$.

Sarja D: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 5$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituus on pienin pisteissä $x = \sqrt{\pi}/2$ ja $x = -\sqrt{\pi}/2$.

c) Janan pituuden pienin arvo on

$$f(\pm\sqrt{\pi}/2) = \pi/4 + 4 - \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \pi/4 + 4 - \sqrt{2}\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \pi/4 + 3.$$

Vastaus: Janan pituuden pienin arvo on $\pi/4 + 3$.

Sarja B: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 3$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituuden pienin arvo on $\pi/4 + 2$.

Sarja C: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 6$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituuden pienin arvo on $\pi/4 + 5$.

Sarja D: Janan toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2 + 5$ ja toinen päätepiste on käyrällä $y = \sqrt{2}\sin(x^2)$. Vastaus: Janan pituuden pienin arvo on $\pi/4 + 4$.

6. Vaakalennossa 1 kilometrin korkeudella lentävä lentokone lähtee suorittamaan silmukkaa, jonka yhtälö sivusta katsottuna on xy-koordinaatistossa $x^2 + (y-3)^2 = 4$. Koordinaatiston yksikkö on kilometri. Vaakalennossa, silmukkaan lähtiessään, lentokone lentää positiivisen x-akselin suuntaan.

   a) Kun lentokone saavuttaa noustessaan korkeuden $y = \frac{9}{5}$ km, koneesta irtoaa huonosti kiinnitetty pultti lentoradan tangentin suuntaan. Mikä on tämän tangentin kulmakerroin? (3 p.)

   b) Irtoava pultti sinkoutuu yläviistoon radalle, joka on alaspäin aukeavan paraabelin muotoinen. Pultti osuu maahan kohdassa $x = 3$ km. Mikä on tämän paraabelin yhtälö? (3 p.)

Ratkaisu:

Seuraavissa laskuissa koordinaatiston yksikkö on aina km.

Silmukan yhtälöstä nähdään, että kyseessä on ympyrä, jonka keskipiste on $(0, 3)$ ja jonka säde on 2. Silmukkaan lähtiessään lentokone on ympyrän kehällä koordinaatiston pisteessä $(0, 1)$.

a) Ratkaistaan silmukan yhtälöstä y:

$$\begin{aligned}
& x^2 + (y-3)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & (y-3)^2 = 4 - x^2 \\
\Leftrightarrow\ & y - 3 = \pm\sqrt{4 - x^2} \\
\Leftrightarrow\ & y = 3 \pm \sqrt{4 - x^2}.
\end{aligned}$$

Korkeudella $y = \frac{9}{5}$ lentokone on ympyrän alemmalla kaarella, joten tällöin $y = 3 - \sqrt{4 - x^2}$.

Ratkaistaan tätä korkeutta vastaava x-koordinaatti:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + \left(\frac{9}{5} - 3\right)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + \left(\frac{9}{5} - \frac{15}{5}\right)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + \left(\frac{9-15}{5}\right)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + \left(\frac{-6}{5}\right)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + \frac{36}{25} = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 4 - \frac{36}{25} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{100}{25} - \frac{36}{25} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{100-36}{25} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{64}{25} \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\sqrt{\frac{64}{25}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

Koska lentokone on nousussa, $x = \frac{8}{5}$.

Lasketaan alemman ympyrän kaaren derivaatan arvo irtoamispisteessä:

Koska

$$y(x) = 3 - \sqrt{4 - x^2} = 3 - (4 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

niin

$$y'(x) = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = x(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

ja

$$y'\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{8/5}{\sqrt{4 - (8/5)^2}} = \frac{8/5}{\sqrt{\frac{100}{25} - \frac{64}{25}}} = \frac{8/5}{\sqrt{\frac{100-64}{25}}} = \frac{8/5}{6/5} = \frac{4}{3}.$$

Kysytty tangentin kulmakerroin on siis $\frac{4}{3}$.

Vastaus: Tangentin kulmakerroin on $\frac{4}{3}$.

b) Alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö yleisessä muodossa on $y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$.

Pultin irtomiskohdassa paraabelin tangenttisuora on sama kuin ympyrällä. Näin ollen ympyrän ja paraabelin tangenttien kulmakertoimetkin ovat tässä pisteessä samat. Funktion

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

derivaatta on

$$y'(x) = 2ax + b$$

ja tangentin kulmakerroin kohdassa $x = \frac{8}{5}$ on

$$y'\Big(\frac{8}{5}\Big) = \frac{16}{5}a + b = \frac{4}{3}.$$

Huomataan, että

$$\frac{16}{5}a + b = \frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; 48a + 15b = 20.$$

Saadaan yhtälö (1): $48a + 15b = 20$.

Pultin irtoamispiste on myös paraabelin $y(x) = ax^2 + bx + c$ piste, joten

$$y\Big(\frac{8}{5}\Big) = a\Big(\frac{8}{5}\Big)^2 + \frac{8}{5}b + c = \frac{64a}{25} + \frac{8}{5}b + c = \frac{9}{5}.$$

Huomataan, että

$$\frac{64a}{25} + \frac{8}{5}b + c = \frac{9}{5} \;\Leftrightarrow\; 64a + 40b + 25c = 45.$$

Saadaan yhtälö (2): $64a + 40b + 25c = 45$.

Lisäksi piste, jossa pultti iskeytyy maahan, on paraabelin $y(x) = ax^2 + bx + c$ piste, joten

$$y(3) = a \cdot 3^2 + 3b + c = 9a + 3b + c = 0.$$

Saadaan yhtälö (3): $9a + 3b + c = 0$.

Ratkaistaan yhtälöistä (1), (2) ja (3) muodostuva yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 48a & + & 15b & & & = & 20 \\ 64a & + & 40b & + & 25c & = & 45 \\ 9a & + & 3b & + & c & = & 0. \end{cases}$$

Koska $-25 \cdot 9 + 64 = -161$, $-25 \cdot 3 + 40 = -35$, $-25 \cdot 1 + 25 = 0$ ja $-25 \cdot 0 + 45 = 45$, niin kertomalla kolmas yhtälö luvulla -25 ja lisäämällä se toiseen yhtälöön saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 48a & + & 15b & = & 20 \\ -161a & - & 35b & = & 45. \end{cases}$$

Koska $7 \cdot 48 + 3 \cdot (-161) = -147$, $7 \cdot 15 + 3 \cdot -35 = 0$, ja $7 \cdot 20 + 3 \cdot 45 = 275$, niin kertomalla ylempi yhtälö luvulla 7, alempi luvulla 3 ja summaamalla yhtälöt saadaan

$$-147a = 275,$$

ja tästä edelleen

$$a = -\frac{275}{147}.$$

Sijoittamalla $a = -\frac{275}{147}$ yhtälöön (1) saadaan

$$48 \cdot \Big(-\frac{275}{147}\Big) + 15b = 20,$$

ja tästä edelleen

$$b = \Big(20 - 48 \cdot \Big(-\frac{275}{147}\Big)\Big)/15 = \Big(\frac{2940}{147} + \frac{13200}{147}\Big)/15 = \frac{16140}{15 \cdot 147} = \frac{1076}{147}.$$

Sijoittamalla $a = -\frac{275}{147}$ ja $b = \frac{1076}{147}$ yhtälöön (3) saadaan

$$9 \cdot \left(-\frac{275}{147}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1076}{147}\right) + c = 0,$$

ja tästä edelleen

$$c = -9 \cdot \left(-\frac{275}{147}\right) - 3 \cdot \left(\frac{1076}{147}\right) = \frac{2475}{147} - \frac{3228}{147} = -\frac{753}{147}.$$

Kysytty paraabelin yhtälö on siis

$$y = -\frac{275}{147}x^2 + \frac{1076}{147}x - \frac{753}{147}.$$

Vastaus: Paraabelin yhtälö on $y = -\frac{275}{147}x^2 + \frac{1076}{147}x - \frac{753}{147}$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.