**Diplomingenjörs- och arkitektutbildningens gemensamma antagning 2018**

Arkitektantagningens prov i matematik, 21.5.2018, Lösningar (SERIE A)

1. Ge exakt svar i a), b) och c) uppgifterna.

   a) Vilka reella tal $x$ uppfyller likheten $x^2 = 7$?

   (1 p.)

   b) Vilka reella tal $x$ uppfyller likheten $\frac{5}{4} \cdot \frac{x}{3} = 2$?

   (1 p.)

   c) Vad är medelvärdet av talen $2, 5, 0, -4$ och $1$?

   (1 p.)

   d) En ask med färgpennor kostar 19,90 euro i december. I januari stiger priset 14 %. Hur mycket kostar asken efter prishöjningen?

   (1 p.)

   e) En ask med färgpennor kostar 19,90 euro i december. I januari sjunker priset 14 %. Hur mycket kostar asken efter prissänkningen?

   (1 p.)

   f) En ask med färgpennor kostar 19,90 euro i december. I januari sänks priset först 14 % och sedan stiger priset 14 %. Hur mycket kostar asken efter prisförändringarna?

   (1 p.)

Lösning:

a) Likheten $x^2 = 7$ uppfylls om och endast om $x$ är $\sqrt{7}$ eller $-\sqrt{7}$.

Svar: De reella talen $\sqrt{7}$ och $-\sqrt{7}$.

Serie B: $x^2 = 5$, Svar: $\sqrt{5}$ och $-\sqrt{5}$.

Serie C: $x^2 = 3$, Svar: $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$.

Serie D: $x^2 = 2$, Svar: $\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$.

b) Vi ser att

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot x}{4 \cdot 3} = 2 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot x}{12} = 2$$
$$\Leftrightarrow 5 \cdot x = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow 5 \cdot x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5}.$$

Därför är $x = \frac{24}{5}$ det enda reella tal som uppfyller likheten $\frac{5}{4} \cdot \frac{x}{3} = 2$.

Svar: Det reella talet $x = \frac{24}{5}$.

Serie B: $\frac{x}{4} \cdot \frac{5}{3} = 2$, Svar: $x = \frac{24}{5}$.

Serie C: $\frac{x}{3} \cdot \frac{7}{5} = 2$, Svar: $x = \frac{30}{7}$.

Serie D: $\frac{x}{5} \cdot \frac{7}{3} = 2$, Svar: $x = \frac{30}{7}$.

c) Medelvärdet av talen $2, 5, 0, -4$ och $1$ är

$$\frac{2+5+0+(-4)+1}{5} = \frac{2+5-4+1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Svar: Medelvärdet av talen $2, 5, 0, -4$ och $1$ är $\frac{4}{5}$.

Serie B: Talen $2, 7, 0, -4$ och $1$, Svar: $\frac{6}{5}$.

Serie C: Talen $3, 5, 0, -7$ och $1$, Svar: $\frac{2}{5}$.

Serie D: Talen $3, 7, 0, -4$ och $1$, Svar: $\frac{7}{5}$.

d) Eftersom

$$19,90 \text{ e } + 0,14 \cdot 19,90 \text{ e } = 22,686 \text{ e } \approx 22,69 \text{ e},$$

kostar asken med färgpennor $22,69$ euro efter prishöjningen.

Svar: Efter prishöjningen kostar asken med färgpennor $22,69$ euro.

Serie B: En ask med färgpennor kostar $19,90$ euro i december. I januari stiger priset $12$ %. Svar: Efter prishöjningen kostar asken med färgpennor $22,29$ euro.

Serie C: En ask med färgpennor kostar $19,90$ euro i december. I januari stiger priset $18$ %. Svar: Efter prishöjningen kostar asken med färgpennor $23,48$ euro.

Serie D: En ask med färgpennor kostar $19,90$ euro i december. I januari stiger priset $16$ %. Svar: Efter prishöjningen kostar asken med färgpennor $23,08$ euro.

e) Eftersom

$$19,90 \text{ e } - 0,14 \cdot 19,90 \text{ e } = 17,114 \text{ e } \approx 17,11 \text{ e},$$

kostar asken med färgpennor $17,11$ euro efter prissänkningen.

Svar: Efter prissänkningen kostar asken med färgpennor $17,11$ euro.

Serie B: En ask med färgpennor kostar $19,90$ euro i december. I januari sjunker priset $12$ %. Svar: Efter prissänkningen kostar asken med färgpennor $17,51$ euro.

Serie C: En ask med färgpennor kostar $19,90$ euro i december. I januari sjunker priset $18$ %. Svar: Efter prissänkningen kostar asken med färgpennor $16,32$ euro.

Serie D: En ask med färgpennor kostar $19,90$ euro i december. I januari sjunker priset $16$ %. Svar: Efter prissänkningen kostar asken med färgpennor $16,72$ euro.

f) Eftersom

$$19,90 \text{ e } - 0,14 \cdot 19,90 \text{ e } = 17,114 \text{ e}$$

och

$$17,114 \text{ e } + 0,14 \cdot 17,114 \text{ e } = 19,50996 \text{ e } \approx 19,51 \text{ e},$$

kostar asken med färgpennor $19,51$ euro efter prisförändringarna.

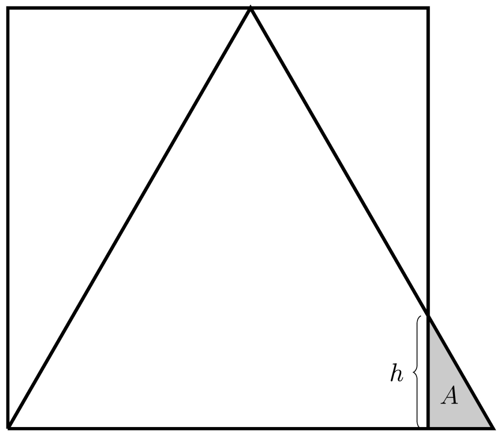
Svar: Efter prisförändringarna kostar asken med färgpennor $19,51$ euro.

Serie B: En ask med färgpennor kostar $19,90$ euro i december. I januari sänks priset först $12$ % och sedan stiger priset $12$ %. Svar: Efter prisförändringarna kostar asken med färgpennor $19,61$ euro.

Serie C: En ask med färgpennor kostar 19, 90 euro i december. I januari sänks priset först 18 % och sedan stiger priset 18 %. Svar: Efter prisförändringarna kostar asken med färgpennor 19, 26 euro.

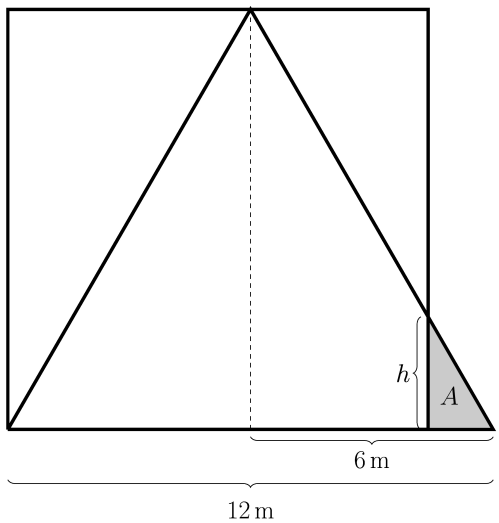
Serie D: En ask med färgpennor kostar 19, 90 euro i december. I januari sänks priset först 16 % och sedan stiger priset 16 %. Svar: Efter prisförändringarna kostar asken med färgpennor 19, 39 euro.

2. Arkitektstudenten Pekkala bygger tak över sin kvadratformade veranda. Taket är av glas och formad som en liksidig triangel. Se figur nedan. Taket och verandan är horisontella och taket täcker verandan endast delvis som i figuren. Beräkna höjden ($h$) och arean ($A$) av den del av taket som inte täcker verandan (färglagd i figuren) när en sida av glastaket är 12 meter. Ge exakt svar och närmevärde med två decimaler. (6 p.)




Lösning:

Låt höjden i den lilla gråa triangeln i figuren vara $h$ och dess area vara $A$.




Det följer av Pythagoras sats att höjden i den liksidiga triangeln i figuren är

$$k = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (6 \text{ m})^2} = \sqrt{108} \text{ m } = \sqrt{3} \cdot 6 \text{ m}.$$

Höjden av den liksidiga triangeln i figuren är detsamma som längden av kvadratens sida i figuren. Därför är längden av basen i den lilla gråa triangeln i figuren

$$12 \text{ m } - \sqrt{3} \cdot 6 \text{ m}.$$

Eftersom hälften av den liksidiga triangeln i figuren och den lilla gråa triangeln i figuren är likformiga, ser vi att

$$\frac{h}{12 \text{ m } - \sqrt{108} \text{ m}} = \frac{6\sqrt{3} \text{ m}}{6 \text{ m}} = \sqrt{3},$$

som ger

$$h = \sqrt{3} \cdot (12 \text{ m } - 6\sqrt{3} \text{ m }) = (\sqrt{3} \cdot 12 - 18) \text{ m } \approx 2{,}7846 \text{ m}.$$

Den lilla triangelns area är

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot 12 \text{ m } - 18 \text{ m}) \cdot (12 \text{ m } - \sqrt{3} \cdot 6 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (12 \text{ m } - \sqrt{3} \cdot 6 \text{ m}) \cdot (12 \text{ m } - \sqrt{3} \cdot 6 \text{ m}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (12 - \sqrt{3} \cdot 6)^2 \text{ m}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (12^2 - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 + (\sqrt{3} \cdot 6)^2) \text{ m}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (12^2 - 12^2 \cdot \sqrt{3} + 12^2 \cdot \frac{3}{4}) \text{ m}^2 \\ &= (\sqrt{3} \cdot 126 - 216) \text{ m}^2 \approx 2{,}2384 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Svar: Höjden av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $h = (\sqrt{3} \cdot 12 - 18)$ m. Närmevärde med två decimaler är $2{,}78$ m. Arean av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $A = (\sqrt{3} \cdot 126 - 216)$ m$^2$. Närmevärde med två decimaler är $2{,}24$ m$^2$.

Serie B: Sidan av glastaket är 18 meter. Svar: Höjden av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $h = (\sqrt{3} \cdot 18 - 27)$ m. Närmevärde med två decimaler är $4{,}18$ m. Arean av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $A = (\frac{\sqrt{3} \cdot 567}{2} - 486)$ m$^2$. Närmevärde med två decimaler är $5{,}04$ m$^2$.

Serie C: Sidan av glastaket är 16 meter. Svar: Höjden av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $h = (\sqrt{3} \cdot 16 - 24)$ m. Närmevärde med två decimaler är $3{,}71$ m. Arean av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $A = (\sqrt{3} \cdot 224 - 384)$ m$^2$. Närmevärde med två decimaler är $3{,}98$ m$^2$.

Serie D: Sidan av glastaket är 14 meter. Svar: Höjden av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $h = (\sqrt{3} \cdot 14 - 21)$ m. Närmevärde med två decimaler är $3{,}25$ m. Arean av den triangulära delen av taket som inte täcker verandan är $A = (\frac{\sqrt{3} \cdot 343}{2} - 294)$ m$^2$. Närmevärde med två decimaler är $3{,}05$ m$^2$.

3.

a) Vilka reella tal $x$ uppfyller likheten $4x^2 + 2x - 1 = 0$? Ge exakt svar och närmevärde med två decimaler. (3 p.)

b) Studera vinkeln $\alpha$. Man vet att

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

och att

$$\sin\alpha \leq \sqrt{3}\cos\alpha.$$

Hur stor kan vinkeln $\alpha$ maximalt vara? Ge exakt svar. (3 p.)

Lösning:

a) Nollställena till parabeln

$$y = 4x^2 + 2x - 1$$

är

$$\frac{-2+\sqrt{2^2-4\cdot 4\cdot(-1)}}{2\cdot 4} = \frac{-2+\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2+\sqrt{20}}{8}$$
$$= \frac{-2+\sqrt{2^2\cdot 5}}{8} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0,3090$$

och

$$\frac{-2-\sqrt{2^2-4\cdot 4\cdot(-1)}}{2\cdot 4} = \frac{-2-\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2-\sqrt{20}}{8}$$
$$= \frac{-2-\sqrt{2^2\cdot 5}}{8} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \approx -0,8090.$$

Svar: Likheten $4x^2+2x-12x^2-3x-3=0$ uppfylls om och endast om $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0,31$ eller $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \approx -0,81$.

Serie B: $4x^2+5x-1=0$. Svar: Likheten $4x^2+5x-1=0$ uppfylls om och endast om $x = \frac{-5+\sqrt{41}}{8} \approx 0,18$ eller $x = \frac{-5-\sqrt{41}}{8} \approx -1,43$.
Serie C: $4x^2+7x-1=0$. Svar: Likheten $4x^2+7x-1=0$ uppfylls om och endast om $x = \frac{-7+\sqrt{65}}{8} \approx 0,13$ eller $x = \frac{-7-\sqrt{65}}{8} \approx -1,88$.
Serie D: $4x^2+6x-1=0$. Svar: Likheten $4x^2+6x-1=0$ uppfylls om och endast om $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{4} \approx 0,15$ eller $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{4} \approx -1,65$.

b) På grund av $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gäller både $\sin\alpha > 0$ och $\cos\alpha > 0$, vilket ger

$$\sin\alpha \leq \sqrt{3}\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \leq \sqrt{3}.$$

Å andra sidan är

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

en strängt växande funktion på intervallet $]0, \frac{\pi}{2}[$, vilket ger att den maximala vinkeln är precis vinkeln $\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, som uppfyller

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \sqrt{3}.$$

Eftersom

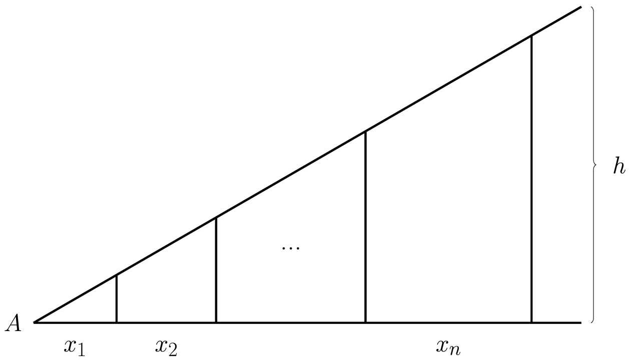
$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

kan $\alpha$ maximalt vara $\frac{\pi}{3}$.

Svar: Vinkeln $\alpha$ kan maximalt vara $\frac{\pi}{3}$.

Serie B, C och D: Samma som serie A.

4. Undersök en byggnad formad som en rätvinklig triangel vars höjd är $h$. Se figur. Avståndet mellan två på varandra följande stödbalkar $x_{k+1}$ är alltid 20 % större än avståndet mellan de två föregående stödbalkarna $x_k$, $k = 1, 2, \ldots$. I hörnet $A$ är vinkeln $\frac{\pi}{6}$ och $x_1 = 1$ m.




a) Hur många stödbalkar har byggnaden om $h = 3$ m? (4 p.)

b) Vad är summan av stödbalkarnas höjder om $h = 3$ m? Ge närmevärde med två decimaler. (2 p.)

Lösning:

a) Eftersom

$$x_{i+1} = 1,2 \cdot x_i,$$

så bildar avstånden mellan stödbalkarna en geometrisk följd och därför

$$x_{i+1} = x_1 \cdot 1,2^i = 1,2^i \text{ m}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Det följer att längden av basen i triangeln som motsvarar den $k$:te,$k \geq 1$, stödbalken är den geometriska summan

$$\sum_{i=0}^{k-1} 1,2^i \text{ m} \ = \frac{1,2^k - 1}{1,2 - 1} \text{ m} \ = 5(1,2^k - 1) \text{ m}.$$

Eftersom vinkeln i hörnet $A$ är $\frac{\pi}{6}$, ser vi att längden av stödbalken $k$ är

$$\tan\frac{\pi}{6} \cdot 5(1,2^k - 1) \text{ m} \ = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} \cdot 5(1,2^k - 1) \text{ m}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 5(1,2^k - 1) \text{ m} \ = \frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^k - 1) \text{ m}.$$

Höjden av den första stödbalken är

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2 - 1) \text{ m} \ \approx 0,57735 \text{ m}.$$

Höjden av den andra stödbalken är

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^2-1)\ \mathrm{m}\ \approx 1,27017\ \mathrm{m}.$$

Höjden av den tredje stödbalken är

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^3-1)\ \mathrm{m}\ \approx 2,10156\ \mathrm{m}.$$

Höjden av den fjärde stödbalken är

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^4-1)\ \mathrm{m}\ \approx 3,09922\ \mathrm{m}.$$

Eftersom höjden av den fjärde stödbalken är över 3 meter, har byggnaden tre stödbalker.

Svar: Byggnaden har tre stödbalker.

Serie B, C och D: Samma som serie A.

b) Summan av stödbalkarnas höjder är

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2-1)\ \mathrm{m}\ +\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^2-1)\ \mathrm{m}\ +\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^3-1)\ \mathrm{m}$$
$$\approx 0,57735\ \mathrm{m}\ +1,27017\ \mathrm{m}\ +2,10156\ \mathrm{m}\ =3,94908\ \mathrm{m}.$$

Svar: Summan av stödbalkarnas höjder är $3,95$ m.

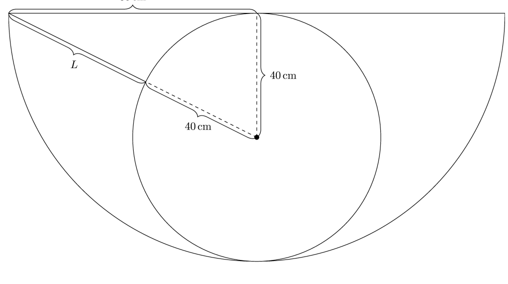
Serie B, C och D: Samma som serie A.

5. En boll placeras på botten av en halvklotsformad skål. Skålens radie är 80 cm och bollens radie är 40 cm. Bollen stöds av tre stänger som har samma längd och som fästes i skålens överkant, så att bollen inte kan röra sig och inte falla ner även om skålen vänds upp och ner. Stängerna har placerats jämt längs skålens överkant, pekar vinkelrät mot bollens mittpunkt och stängernas ändpunkter nuddar bollen i rät vinkel. Bestäm längden på en stång. Ge närmevärde med två decimaler. Obs: I detta problem bortser vi från stängernas tjocklek och massa.

(6 p.)

Lösning:

Låt längden av en stång vara $L$.



Vi bildar en rätvinklig triangel som har en katet med längd lika med skålens radie $R = 80$ cm, en katet med längd lika med bollens radie $r = 40$ cm och hypotenusa $L + r$, där $L$ är längden av en stång. Pythagoras sats ger att

$$L + r = \sqrt{R^2 + r^2} = \sqrt{(80 \text{ cm})^2 + (40 \text{ cm})^2} = 40 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}$$

och därför

$$L = 40 \cdot \sqrt{5} \text{ cm} - 40 \text{ cm} \approx 49,44 \text{ cm}.$$

Svar: Längden på en stång är $49,44$ cm.

Serie B: Skålens radie är 60 cm och bollens radie är 30 cm. Svar: Längden på en stång är $37,08$ cm.

Serie C: Skålens radie är 100 cm och bollens radie är 50 cm. Svar: Längden på en stång är $61,80$ cm.

Serie D: Skålens radie är 20 cm och bollens radie är 10 cm. Svar: Längden på en stång är $12,36$ cm.

6. Ett konstverk planeras för en konsertbyggnads kafeteria. Konstverket skall bestå av färglagda kuber. Kubernas sidor färgläggs så att varje sida har precis en färg och närliggande sidor har olika färg. Två sidor är närliggande precis då de delar en kant.

   a) Hur många olika kuber kan man få om man använder precis tre olika färger? (2 p.)

   b) Hur många olika kuber kan man få om man använder precis fyra olika färger? (2 p.)

   c) Hur många olika kuber kan man få om man använder precis fem olika färger? (2 p.)

Lösning:

a) Vi skall använda precis tre färger. Om två sidor som ligger mittemot varandra har olika färg, måste två närliggande sidor har samma färg. Därför måste alla sidor som ligger mittemot varandra ha samma färg. Eftersom vi använder precis tre färger, har vi bara en möjlig kub.

Svar: En kub.

Serie B, C och D: Samma som serie A.

b) Vi skall använda precis fyra färger. Eftersom kuber har sex sidor och närliggande sidor skall ha olika färg, har vi precis två par av motstående sidor vars sidor har samma färg. För dessa par, kan vi välja färger på

$$\binom{4}{2} = 6$$

sätt. De två återstående sidorna ligger mittemot varandra och de måste färgläggas med de två återstående färgerna. Det spelar ingen roll på vilka sidor vi färglägger med dessa färger, eftersom kuben kan vändas.

Svar: Sex kuber.

Serie B, C och D: Samma som serie A.

c) Vi skall använda precis fem färger. Nu får vi två motstående sidor som måste ha samma färg och för dessa sidor kan vi välja mellan fem möjliga färger. De fyra kvarvarande sidorna måste färgläggas med de fyra kvarvarande färgerna. Vi väljer färgen för en av de kvarvarande sidorna. Nu kan vi välja färgen på den motstående sidan på tre olika sätt. De två kvarvarande sidorna måste färgläggas med de två kvarvarande färgerna. Det spelar ingen roll på vilka sidor vi färglägger med dessa färger, eftersom kuben kan vändas. Därför får vi $5 \cdot 3 = 15$ olika kuber.

Svar: 15 kuber.

Serie B, C och D: Samma som serie A.