Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2018

Insinöörivalinnan matematiikan koe, 29.5.2018, Ratkaisut (Sarja A)

1. Anna kaikissa kohdissa vastaukset tarkkoina arvoina. Kohdassa d), anna kulmat radiaaneina.

   a) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{5}{4} + \frac{x}{3} = 2$? (1 p.)

   b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{x}{3} : \frac{4}{5} = 2$? (1 p.)

   c) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $x^2 > x$? (1 p.)

   d) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $6\cos x = 3$? (1 p.)

   e) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $e^x - 3 = 0$? (1 p.)

   f) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $\ln x > 3$? (1 p.)

Ratkaisu:

a) Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{4} + \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \frac{4 \cdot x}{4 \cdot 3} = 2 \Leftrightarrow \frac{15}{12} + \frac{4 \cdot x}{12} = 2 \\
\Leftrightarrow &\frac{15 + 4x}{12} = 2 \Leftrightarrow 15 + 4x = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow 15 + 4x = 24 \\
\Leftrightarrow &4x = 24 - 15 \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{5}{4} + \frac{x}{3} = 2$, on $x = \frac{9}{4}$.
Vastaus: Reaaliluku $x = \frac{9}{4}$.

Sarja B: $\frac{5}{3} + \frac{x}{4} = 2$. Vastaus: $x = \frac{4}{3}$.
Sarja C: $\frac{4}{5} + \frac{x}{3} = 2$. Vastaus: $x = \frac{18}{5}$.
Sarja D: $\frac{4}{3} + \frac{x}{5} = 2$. Vastaus: $x = \frac{10}{3}$.

b) Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{3} : \frac{4}{5} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \cdot \frac{5}{4} = 2 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 5}{3 \cdot 4} = 2 \\
\Leftrightarrow &\frac{x \cdot 5}{12} = 2 \Leftrightarrow x \cdot 5 = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow x \cdot 5 = 24 \\
\Leftrightarrow &x = \frac{24}{5}.
\end{aligned}$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{3} : \frac{4}{5} = 2$, on $x = \frac{24}{5}$.

Vastaus: Reaaliluku $x = \frac{24}{5}$.

Sarja B: $\frac{x}{4} : \frac{3}{5} = 2$, Vastaus: $x = \frac{24}{5}$.

Sarja C: $\frac{x}{3} : \frac{5}{7} = 2$, Vastaus: $x = \frac{30}{7}$.

Sarja D: $\frac{x}{5} : \frac{3}{7} = 2$, Vastaus: $x = \frac{30}{7}$.

c) Epäyhtälö $x^2 > x$ toteutuu jos ja vain jos $x^2 - x > 0$.

Ratkaistaan paraabelin $x^2 - x$ nollakohdat:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 1.$$

Koska paraabeli $x^2 - x$ on ylöspäin aukeava, niin epäyhtälö $x^2 - x > 0$ toteutuu jos ja vain jos $x < 0$ tai $x > 1$.

Vastaus: $x^2 > x$ toteutuu jos ja vain jos $x < 0$ tai $x > 1$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

d) Huomataan, että

$$6\cos x = 3 \Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2},$$

ja että $\cos x = \frac{1}{2}$ jos ja vain jos $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

Vastaus: $6\cos x = 3$, jos ja vain jos $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

Sarja B: $4\cos x = 2$, Vastaus: $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, missä n on kokonaisluku.

Sarja C: $7\cos x = 14$, Vastaus: Yksikään reaaliluku ei toteuta yhtälöä $7\cos x = 14$.

Sarja D: $5\cos x = 10$, Vastaus: Yksikään reaaliluku ei toteuta yhtälöä $5\cos x = 10$.

e) Koska

$$e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3) \Leftrightarrow x = \ln(3),$$

niin ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $e^x - 3 = 0$, on $\ln(3)$.

Vastaus: Reaaliluku $x = \ln(3)$.

Sarja B: $e^x - 5 = 0$, Vastaus: $x = \ln(5)$.

Sarja C: $e^x - 2 = 0$, Vastaus: $x = \ln(2)$.

Sarja D: $e^x - 4 = 0$, Vastaus: $x = \ln(4)$.

f) Huomataan, että

$$\ln x > 3 \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^3 \Leftrightarrow x > e^3.$$

Vastaus: Epäyhtälö $\ln x > 3$ toteutuu jos ja vain jos $x > e^3$.

Sarja B: $\ln x > 5$, Vastaus: $x > e^5$.

Sarja C: $\ln x > 2$, Vastaus: $x > e^2$.

Sarja D: $\ln x > 2$, Vastaus: $x > e^2$.

2. Anna kaikkien kohtien vastaukset tarkkoina arvoina. Kohtien c) ja d) ratkaisuissa voi käyttää kohtien a) ja b) tuloksia ja kohdan e) ratkaisussa voi käyttää kaikkien edellisten kohtien tuloksia.

   a) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $2x^2 - 3x - 3 = 0$? (1 p.)

   b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $2x^2 - 5x + 1 = 0$? (1 p.)

   c) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtä aikaa sekä epäyhtälön $x - 2 \geq 0$ että epäyhtälön $2x^2 - 4x - 1 + |x - 2| \leq 0$? (1 p.)

   d) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtä aikaa sekä epäyhtälön $x - 2 < 0$ että epäyhtälön $2x^2 - 4x - 1 + |x - 2| \leq 0$? (1 p.)

   e) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat epäyhtälön $2x^2 - 4x - 1 + |x - 2| \leq 0$? (2 p.)

Ratkaisu:

a) Paraabelin

$$y = 2x^2 - 3x - 3$$

nollakohdat ovat

$$\frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + \sqrt{9 + 24}}{-6} = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$$

ja

$$\frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot (-3)} = \frac{3 - \sqrt{9 + 24}}{4} = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}.$$

Vastaus: Yhtälö $2x^2 - 3x - 3 = 0$ toteutuu jos ja vain jos $x = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ tai $x = \frac{3-\sqrt{33}}{4}$.

Sarja B: $2x^2 - 15x + 24 = 0$. Vastaus: $x = \frac{15+\sqrt{33}}{4}$ tai $x = \frac{15-\sqrt{33}}{4}$.

Sarja C: $2x^2 - 7x + 2 = 0$. Vastaus: $x = \frac{7+\sqrt{33}}{4}$ tai $x = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$.

Sarja D: $2x^2 - 11x - 11 = 0$. Vastaus: $x = \frac{11+\sqrt{209}}{4}$ tai $x = \frac{11-\sqrt{209}}{4}$.

b) Paraabelin

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

nollakohdat ovat

$$\frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + \sqrt{25 - 8}}{4} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

ja

$$\frac{-(-5)-\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{5-\sqrt{17}}{4}.$$

Vastaus: Yhtälö $2x^2-5x+1=0$ toteutuu jos ja vain jos $x=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ tai $x=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

Sarja B: $2x^2-17x+34=0$. Vastaus: $x=\frac{17+\sqrt{17}}{4}$ tai $x=\frac{17-\sqrt{17}}{4}$.

Sarja C: $2x^2-9x+8=0$. Vastaus: $x=\frac{9+\sqrt{17}}{4}$ tai $x=\frac{9-\sqrt{17}}{4}$.

Sarja D: $2x^2-13x+19=0$. Vastaus: $x=\frac{13+\sqrt{17}}{4}$ tai $x=\frac{13-\sqrt{17}}{4}$.

c) Ensimmäisestä epäyhtälöstä $x-2\geq 0$ seuraa, että $x\geq 2$ ja että toinen tarkasteltava epäyhtälö voidaan esittää muodossa

$$2x^2-4x-1+(x-2)\leq 0.$$

Paraabeli

$$y=2x^2-4x-1+x-2=2x^2-3x-3$$

ja kohdan a) ratkaisun nojalla sen nollakohdat ovat $x=\frac{3+\sqrt{33}}{4}$ ja $x=\frac{3-\sqrt{33}}{4}$. Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälö

$$2x^2-3x-3\leq 0$$

toteutuu, jos ja vain jos $\frac{3-\sqrt{33}}{4}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{33}}{4}$. Toisaalta ehdosta $x-2\geq 0$ seurasi, että $x\geq 2$. Täten $2\leq x\leq\frac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Vastaus: Molemmat epäyhtälöt $x-2\geq 0$ ja $2x^2-4x-1+|x-2|\leq 0$ toteutuvat jos ja vain jos $2\leq x\leq\frac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Sarja B: $x-5\geq 0$ ja $2x^2-16x+29+|x-5|\leq 0$. Vastaus: $5\leq x\leq\frac{15+\sqrt{33}}{4}$.

Sarja C: $x-3\geq 0$ ja $2x^2-8x+5+|x-3|\leq 0$. Vastaus: $3\leq x\leq\frac{7+\sqrt{33}}{4}$.

Sarja D: $x-4\geq 0$ ja $2x^2-12x+15+|x-4|\leq 0$. Vastaus: $4\leq x\leq\frac{11+\sqrt{33}}{4}$.

d) Ensimmäisestä epäyhtälöstä $x-2<0$ seuraa, että $x<2$ ja että toinen tarkasteltava epäyhtälö voidaan esittää muodossa

$$2x^2-4x-1-(x-2)<0.$$

Paraabeli

$$y=2x^2-4x-1-x+2=2x^2-5x+1$$

ja kohdan b) ratkaisun nojalla sen nollakohdat ovat $x=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ ja $x=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$. Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälö

$$2x^2-5x+1\leq 0$$

toteutuu, jos ja vain jos $\frac{5-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq\frac{5+\sqrt{17}}{4}$. Toisaalta ehdosta $x-2<0$ seurasi, että $x<2$. Täten $\frac{5-\sqrt{17}}{4}\leq x<2$.

Vastaus: Molemmat epäyhtälöt $x-2<0$ ja $2x^2-4x-1+|x-2|\leq 0$ toteutuvat jos ja vain jos $\frac{5-\sqrt{17}}{4}\leq x<2$.

Sarja B: $x-5<0$ ja $2x^2-16x+29+|x-5|\leq 0$. Vastaus: $\frac{17-\sqrt{17}}{4}\leq x<5$.

Sarja C: $x-3<0$ ja $2x^2-8x+5+|x-3|\leq 0$. Vastaus: $\frac{9-\sqrt{17}}{4}\leq x<3$.

Sarja D: $x-4<0$ ja $2x^2-12x+15+|x-4|\leq 0$. Vastaus: $\frac{13-\sqrt{17}}{4}\leq x<4$.

e) Kun yhdistetään kohtien c) ja d) tulokset, saadaan että epäyhtälö $2x^2-4x-1+|x-2|\leq 0$ toteutuu jos ja vain jos $\frac{5-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Vastaus: Epäyhtälö $2x^2-4x-1+|x-2|\leq 0$ toteutuu jos ja vain jos $\frac{5-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Sarja B: $2x^2-16x+29+|x-5|\leq 0$. Vastaus: $\frac{17+\sqrt{17}}{4}\leq x\leq\frac{15+\sqrt{33}}{4}$.

Sarja C: $2x^2-8x+5+|x-3|\leq 0$. Vastaus: $\frac{9-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq\frac{7+\sqrt{33}}{4}$.

Sarja D: $2x^2-12x+15+|x-4|\leq 0$. Vastaus: $\frac{13-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq\frac{11+\sqrt{33}}{4}$.

3. Eräissä vaaleissa äänestettiin yhtä ehdokkaista A, B, C tai D. Seuraava tulosjakauma julkaistiin, vaikka osa äänistä oli vielä laskematta:

A	B	C	D
60 %	4 %	20 %	16 %

a) Kuinka suuri osuus annetuista äänistä yllä esitetyssä tilanteessa pitää olla laskettuna, jotta ehdokas A voi olla täysin varma siitä, että hän saa vaaleissa suurimman äänimäärän? Anna vastaus prosentteina yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.

(3 p.)

b) Yllä esitetyssä tilanteessa on laskettu 70 % äänistä. Oletetaan, että ehdokaan A lopullinen kannatus on 62 %. Onko mahdollista, että ehdokas D voittaa ehdokkaan C?

(3 p.)

Ratkaisu:

a) Olkoon x vaaleissa annettujen äänien lukumäärä ja olkoon $p\cdot 100$ laskettujen äänien osuus prosentteina. Jo lasketuista äänistä suurin osa (60 %) on annettu ehdokkaalle A ja toiseksi suurin osa (20%) on annettu ehdokkaalle C. Näin ollen ehdokas A voi olla täysin varma siitä, että hän saa suurimman äänimäärän, jos

$$0,60px>0,20px+(1-p)x.$$

Koska annettu äänimäärä on nollaa suurempi,

$$0,60px>0,20px+(1-p)x\Leftrightarrow 0,60p>0,20p+(1-p).$$

Huomataan, että

$$0,60p>0,20p+(1-p)\Leftrightarrow 0,60p-0,20p+p>1\Leftrightarrow 1,40p>1\Leftrightarrow p>\frac{1}{1,4}.$$

Huomataan, että $\frac{1}{1,4}\approx 0,71429$.

Vastaus: Ehdokas A voi olla täysin varma siitä, että hän saa suurimman äänimäärän, jos äänistä on laskettu vähintään 72 %.

Sarja B:

Tulosjakauma:

A	B	C	D
60 %	4 %	23 %	13 %

Vastaus: Ehdokas A voi olla täysin varma siitä, että hän saa suurimman äänimäärän, jos äänistä on laskettu vähintään 73 %.

Sarja C:

Tulosjakauma:

A	B	C	D
60 %	5 %	20 %	15 %

Vastaus: Ehdokas A voi olla täysin varma siitä, että hän saa suurimman äänimäärän, jos äänistä on laskettu vähintään 72 %.

Sarja D:

Tulosjakauma:

A	B	C	D
62 %	10 %	17 %	11 %

Vastaus: Ehdokas A voi olla täysin varma siitä, että hän saa suurimman äänimäärän, jos äänistä on laskettu vähintään 69 %.

b) Olkoon x vaaleissa annettujen äänien lukumäärä. Koska äänistä on laskettu 70 %, niin tiedetään että ehdokkaalla A on koossa $0,6 \cdot 0,7x = 0,42x$ ääntä. Ääniä on laskematta $0,3x$. Ehdokkaan A lopullinen kannatus on 62 %, joten vielä laskematta olevista äänistä $0,2x$ menee ehdokkaalle A. Näin ollen laskematta olevia ääniä on jaossa yhteensä $0,1x$ kappaletta ehdokkaille B, C ja D. Jos ehdokas D saa nämä kaikki jäljellä olevat äänet, niin hänen lopullinen äänimääränsä on $0,70 \cdot 0,16x + 0,10x = 0,212x$ ja ehdokkaan C lopullinen äänimäärä on $0,70 \cdot 0,20x = 0,14x$. Koska $0,212x > 0,14x$, niin on mahdollista, että ehdokas D voittaa ehdokkaan C.

Vastaus: On mahdollista, että ehdokas D voittaa ehdokkaan C.

Sarja B: Sarjan B tulosjakauma on annettu ratkaisun kohdassa a). Vastaus: On mahdollista, että ehdokas D voittaa ehdokkaan C.

Sarja C: Sarjan C tulosjakauma on annettu ratkaisun kohdassa a). Vastaus: On mahdollista, että ehdokas D voittaa ehdokkaan C.

Sarja D: Sarjan D tulosjakauma on annettu ratkaisun kohdassa a). Vastaus: On mahdollista, että ehdokas D voittaa ehdokkaan C.

4. Ympyrän kehältä valitaan kolme pistettä A, B ja C. Ympyrän säde $R = 7$ cm. Pisteiden A ja B välinen etäisyys on $2R$. Kun pisteet yhdistetään janoilla toisiinsa, muodostuu suorakulmainen kolmio.

a) Piirrä kuva, jossa pisteet A, B ja C on merkitty ympyrän kehälle.

(1 p.)

b) Pisteiden A ja C välinen etäisyys on t. Esitä kolmion sivujen yhteispituus $L = L(t)$ muuttujan t funktiona.

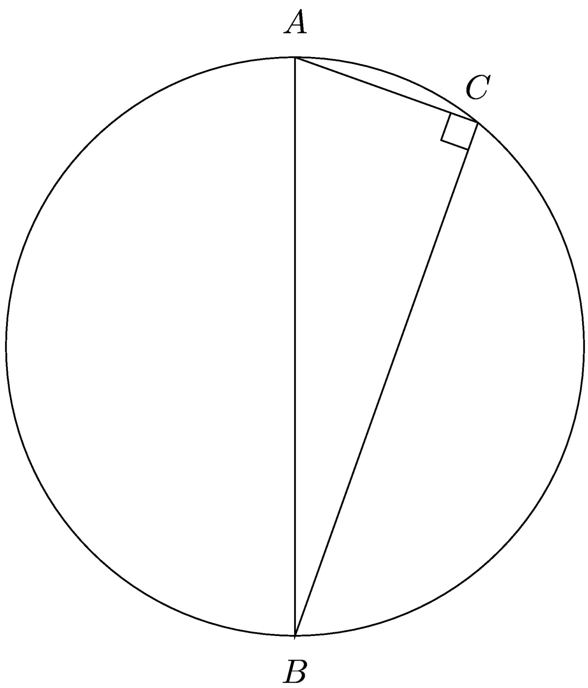
(2 p.)

c) Kuinka suuri sivujen yhteispituus $L(t)$ voi enimmillään olla? Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.

(3 p.)

Ratkaisu:

a)



b) Ympyrän säde on 7 cm, joten kolmion hypotenuusan pituus on $2 \cdot 7$ cm $= 14$ cm. Kolmion toisen kateetin pituus on t ja Pythagoraan lauseen nojalla toisen kateetin pituus on

$$\sqrt{(14\text{ cm})^2 - t^2}.$$

Näin ollen

$$L(t) = t + \sqrt{(14\text{ cm})^2 - t^2} + 14\text{ cm} = t + \sqrt{196\text{ cm}^2 - t^2} + 14\text{ cm},$$

missä $0\text{ cm} \le t \le 14\text{ cm}$.

Vastaus: $L(t) = t + \sqrt{196\text{ cm}^2 - t^2} + 14\text{ cm}$, missä $0\text{ cm} \le t \le 14\text{ cm}$.

Sarja B: $R = 6$ cm. Vastaus: $L(t) = t + \sqrt{144\text{ cm}^2 - t^2} + 12\text{ cm}$, missä $0\text{ cm} \le t \le 12\text{ cm}$.

Sarja C: $R = 9$ cm. Vastaus: $L(t) = t + \sqrt{324\text{ cm}^2 - t^2} + 18\text{ cm}$, missä $0\text{ cm} \le t \le 18\text{ cm}$.

Sarja D: $R = 4$ cm. Vastaus: $L(t) = t + \sqrt{64 \text{ cm}^2 - t^2} + 8$ cm, missä $0 \text{ cm} \leq t \leq 8$ cm.

c) $L(t) = t + \sqrt{196 \text{ cm}^2 - t^2} + 14$ cm, missä $0 \text{ cm} \leq t \leq 14$ cm. Funktio $L(t)$ on jatkuva ja se on derivoituva avoimella välillä $]0 \text{ cm}, 14 \text{ cm}[$, joten se saavuttaa maksimiarvonsa joko välin $[0 \text{ cm}, 14 \text{ cm}]$ päätepisteissä tai jossakin derivaatan nollakohdassa.

Lasketaan ensin funktion arvo välin päätepisteissä:

$$L(0 \text{ cm}) = 0 \text{ cm} + \sqrt{196 \text{ cm}^2 - 0 \text{ cm}^2} + 14 \text{ cm} = \sqrt{196 \text{ cm}^2} + 14 \text{ cm} = 14 \text{ cm} + 14 \text{ cm} = 28 \text{ cm}.$$

$$L(14 \text{ cm}) = 14 \text{ cm} + \sqrt{196 \text{ cm}^2 - (14 \text{ cm})^2} + 14 \text{ cm} = 14 \text{ cm} + \sqrt{196 \text{ cm}^2 - 196 \text{ cm}^2} + 14 \text{ cm}$$

$$= 14 \text{ cm} + 14 \text{ cm} = 28 \text{ cm}.$$

Etsitään sitten funktion derivaatan nollakohdat avoimella välillä $]0 \text{ cm}, 14 \text{ cm}[$:

Kun $0 < t < 14$, niin

$$L'(t) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{196 \text{ cm}^2 - t^2}} \cdot (-2t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{196 \text{ cm}^2 - t^2}}$$

ja $L'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{196 \text{ cm}^2 - t^2}$. Neliöimällä tämä saadaan $t^2 = 196 \text{ cm}^2 - t^2$. Koska $t > 0$ cm,

$$t^2 = 196 \text{ cm}^2 - t^2 \Leftrightarrow 2t^2 = 196 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow t^2 = 98 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{98} \text{ cm} = \sqrt{2} \cdot 7 \text{ cm}.$$

Lasketaan funktion arvo derivaatan nollakohdassa:

$$L(\sqrt{98} \text{ cm}) = \sqrt{98} \text{ cm} + \sqrt{196 \text{ cm}^2 - (\sqrt{98} \text{ cm})^2} + 14 \text{ cm} = \sqrt{98} \text{ cm} + \sqrt{98} \text{ cm} + 14 \text{ cm}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{98} \text{ cm} + 14 \text{ cm} = (2 + 2\sqrt{2}) \cdot 7 \text{ cm}.$$

Koska $(2+2\sqrt{2}) \cdot 7 \text{ cm} > 28$ cm, sivujen yhteispituus $L(t)$ voi olla enimmillään $(2+2\sqrt{2}) \cdot 7$ cm.
Vastaus: Sivujen yhteispituus $L(t)$ voi olla enimmillään $(2 + 2\sqrt{2}) \cdot 7$ cm. Tämän kaksidesimaalinen likiarvo on $33,80$ cm.

Sarja B: $R = 6$ cm. Vastaus: $(2 + 2\sqrt{2}) \cdot 6$ cm. Tämän kaksidesimaalinen likiarvo on $28,97$ cm.

Sarja C: $R = 9$ cm. Vastaus: $(2 + 2\sqrt{2}) \cdot 9$ cm. Tämän kaksidesimaalinen likiarvo on $43,46$ cm.

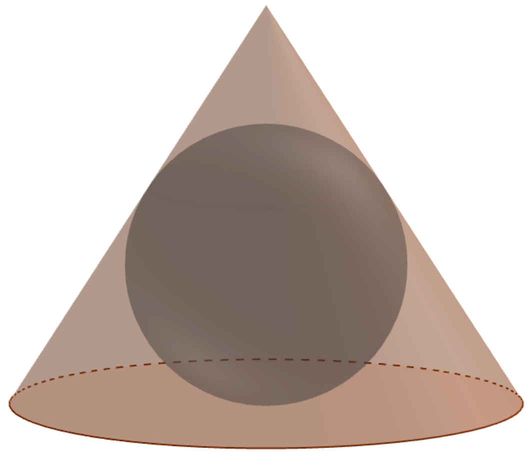
Sarja D: $R = 4$ cm. Vastaus: $(2 + 2\sqrt{2}) \cdot 4$ cm. Tämän kaksidesimaalinen likiarvo on $19,31$ cm.

5. Suoran ympyräkartion K korkeus $h = 8$ cm ja pohjaympyrän säde $r = 6$ cm. Ympyräkartion K sisään asetetaan pallo P, joka sivuaa kartion pohjaympyrää ja vaippaa ja jonka tilavuus on mahdollisimman suuri. Piirrä kuva ympyräkartiosta K ja sen sisällä olevasta pallosta P. Laske pallon P säde r_P ja tilavuus V_P. Anna vastausten yksidesimaaliset likiarvot.

(6 p.)

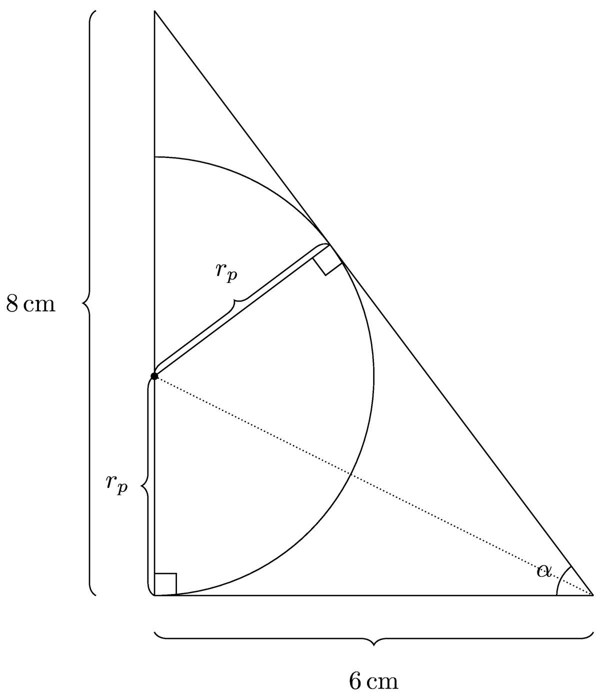
Ratkaisu:

Kuva (1 p.):



Pallon säde (4 p.):

Olkoon suoran ympyräkartion sisään asetetun pallon säde r_p.



Tarkastellaan oheista leikkauskuviota. Olkoon leikkauskuvion suuren suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus x. Pythagoraan lauseen nojalla

$$x^2 = (6\ \text{cm})^2 + (8\ \text{cm})^2$$

ja näin ollen

$$x = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \text{cm}\ .$$

Toisaalta

$$\cos\alpha = \frac{6 \text{ cm}}{x}$$

ja

$$\sin\alpha = \frac{8 \text{ cm}}{x}.$$

Sijoittamalla näihin $x = \sqrt{6^2 + 8^2}$ cm, saadaan

$$\cos\alpha = \frac{6 \text{ cm}}{\sqrt{6^2 + 8^2} \text{ cm}} = \frac{3}{5}$$

ja

$$\sin\alpha = \frac{8 \text{ cm}}{\sqrt{6^2 + 8^2} \text{ cm}} = \frac{4}{5}.$$

Leikkauskuvion kahdella pienellä suorakulmaisella kolmiolla on sama hypotenuusa ja saman pituinen kateetti (r_p), joten Pythagoraan lauseen nojalla myös toinen kateetti on saman pituinen. Näin ollen katkoviivalla merkitty hypotenuusa jakaa kulman α kahteen yhtäsuureen osaan. Nyt, kun tarkastellaan pieniä suorakulmaisia kolmioita, saadaan

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r_p}{6 \text{ cm}}.$$

Koska

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{4}{5} : \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} : \frac{8}{5} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8} = \frac{1}{2},$$

saadaan

$$\frac{r_p}{6 \text{ cm}} = \frac{1}{2},$$

josta edelleen $r_p = 3$ cm.

Pallon tilavuus (1 p.):

Pallon tilavuus

$$V_p = \frac{4}{3}\pi r_p^3 = \frac{4}{3}\pi(3 \text{ cm})^3 \approx 113,1 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: Pallon P säde r_p on 3,0 cm ja tilavuus $V_p = 113,1 \text{ cm}^3$.

Sarja B: Suoran ympyräkartion K korkeus $h = 4$ cm ja pohjaympyrän säde $r = 3$ cm. Vastaus: Pallon P säde r_p on 1,5 cm ja tilavuus $V_p = 14,1 \text{ cm}^3$.

Sarja C: Suoran ympyräkartion K korkeus $h = 12$ cm ja pohjaympyrän säde $r = 9$ cm. Vastaus: Pallon P säde r_p on 4,5 cm ja tilavuus $V_p = 381,7 \text{ cm}^3$.

Sarja D: Suoran ympyräkartion K korkeus $h = 16$ cm ja pohjaympyrän säde $r = 12$ cm. Vastaus: Pallon P säde r_p on 6,0 cm ja tilavuus $V_p = 904,8 \text{ cm}^3$.

6. Oletetaan, että $b, c \in [-1, 1]$. Tarkastellaan funktiota f, $f(x) = x^2 + bx + c$.

   a) Tarkastellaan funktion f arvoa $f(x)$. Oletetaan, että $x \in [-1, 1]$. Osoita, että tällöin funktion f pienin ja suurin arvo ovat molemmat välillä $[-1, 1]$, jos ja vain jos

$$\frac{b^2}{4} - 1 \le c \le -|b|.$$

(3 p.)

b) Oletetaan, että b ja c ovat toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia tasajakaumasta välillä $[-1, 1]$. Millä todennäköisyydellä $f(x) \in [-1, 1]$ kaikilla $x \in [-1, 1]$? Anna vastauksen tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.

(3 p.)

Ratkaisu:

a) Olkoon m funktion f pienin arvo ja M suurin arvo välillä $[-1, 1]$.

Koska $f'(x) = 2x + b = 0$ jos ja vain jos $x = -b/2$ ja koska f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, niin

$$m = f(-b/2) = -b^2/4 + c.$$

Huomaa, että $-b/2 \in [-1, 1]$. Täten

$$m \geq -1 \Leftrightarrow -b^2/4 + c \geq -1 \Leftrightarrow c \geq b^2/4 - 1.$$

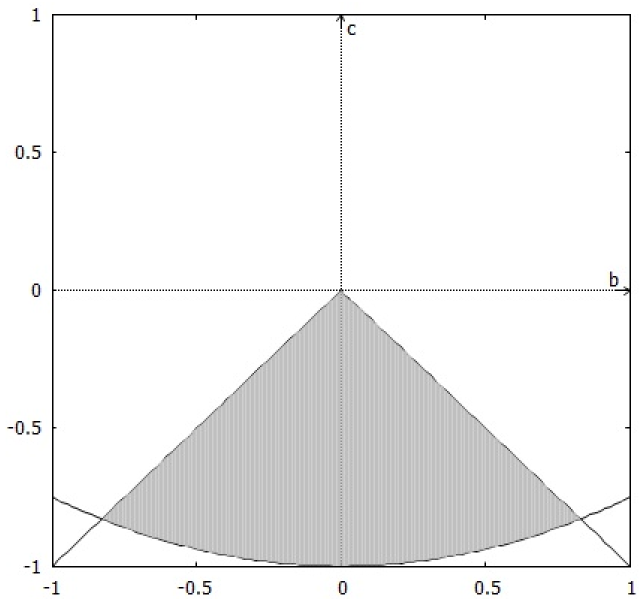
Funktion f suurin arvo M saavutetaan jommassa kummassa välin $[-1, 1]$ päätepisteessä. Nyt

$$M \leq 1 \Leftrightarrow f(-1) \leq 1 \text{ ja } f(1) \leq 1 \Leftrightarrow c \leq b \text{ ja } c \leq -b \Leftrightarrow c \leq -|b|.$$

Näin ollen m ja M ovat välillä $[-1, 1]$ jos ja vain jos $b^2/4 - 1 \leq c \leq -|b|$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

b) Koska $f(x) \in [-1, 1]$ kaikilla $x \in [-1, 1]$ jos ja vain jos m ja M ovat välillä $[-1, 1]$, niin nyt kohdan a) nojalla kysytty todennäköisyys saadaan jakamalla käyrien $c = b^2/4 - 1$ ja $c = -|b|$ väliin jäävän alueen pinta-ala A (harmaa alue kuvassa) neliön $-1 \leq b, c \leq 1$ pinta-alalla joka $2 \cdot 2 = 4$.



Lasketaan käyrien $c = b^2/4 - 1$ ja $c = -|b|$ leikkauspisteet. Jos $b < 0$, niin

$$b^2/4 - 1 = -|b| \Leftrightarrow b^2/4 - 1 = b \Leftrightarrow b = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0,8284.$$

Jos $b \geq 0$, niin

$$b^2/4 - 1 = -|b| \Leftrightarrow b^2/4 - 1 = -b \Leftrightarrow b = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,8284.$$

Täten

$$A = 2\int_0^{2\sqrt{2}-2} \Big(-b - \Big(\frac{b^2}{4} - 1\Big)\Big) db = 2\Big|_0^{2\sqrt{2}-2} \Big(b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{12}\Big) = 4 \cdot \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \approx 0,8758.$$

Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\frac{A}{4} = \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \approx 0,21895.$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$ ja tämän todennäköisyyden kaksidesimaalinen likiarvo on $0,22$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.