

Matematik | Uppgift 1.

a) [1 p.] Vi ser att

$$(x - 5)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x - 10) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 10.$$

Därför uppfylls likheten $(x - 5)^2 = 25$ om och endast om $x = 0$ eller $x = 10$.

b) [1 p.] Olikheten $x^2 > 17$ uppfylls om och endast om $x^2 - 17 > 0$. Vi letar nollställena till polynomet $x^2 - 17$:

$$x^2 - 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 17 \Leftrightarrow x = -\sqrt{17} \text{ tai } x = \sqrt{17}.$$

Eftersom parabeln $y = x^2 - 17$ öppnas uppåt, uppfylls olikheten $x^2 - 17 > 0$ om och endast om $x < -\sqrt{17}$ eller $x > \sqrt{17}$.

c) [1 p.] Vi ser att

$$\frac{5}{4} - \frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} - \frac{4 \cdot x}{4 \cdot 3} = 1 \Leftrightarrow \frac{15}{12} - \frac{4 \cdot x}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{15 - 4x}{12} = 1 \Leftrightarrow 15 - 4x = 1 \cdot 12 \Leftrightarrow 15 - 4x = 12 \\ \Leftrightarrow -4x = 12 - 15 \Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Därför är $x = \frac{3}{4}$ det enda reella tal som uppfyller likheten $\frac{5}{4} - \frac{x}{3} = 1$.

d) [1 p.] Vi ser att

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 4}{2 \cdot 5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 4}{10} = 1 \Leftrightarrow x \cdot 4 = 1 \cdot 10 \Leftrightarrow x \cdot 4 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Därför är $x = \frac{5}{2}$ det enda reella tal som uppfyller likheten $\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{5}$.

e) [1 p.] Eftersom $-\ln x < -6 \Leftrightarrow \ln x > 6 \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^6 \Leftrightarrow x > e^6$, uppfylls olikheten $-\ln x < -6$ om och endast om $x > e^6$.

f) [1 p.] Vi ser att $1 - |\cos x| = 0 \Leftrightarrow 1 = |\cos x|$. Vi vet att $\cos x = 1$ om och endast om $x = n \cdot 2\pi$ och att $\cos x = -1$ om och endast om $x = \pi + n \cdot 2\pi$, när n är godtyckligt heltal.

Således likheten $1 - |\cos x| = 0$ uppfylls om och endast om $x = n \cdot \pi$, när n är godtyckligt heltal.

Matematik | Uppgift 2.

- a) [3 p.] Tågets längd: Eftersom $120 \text{ km} = 120000 \text{ m}$ och $1 \text{ h} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ s}$, får vi $120 \text{ km/h} = (120000/3600) \text{ m/s} = (100/3) \text{ m/s}$. Därför är tåg A:s längd $l_j = 3 \text{ s} \cdot (100/3) \text{ m/s} = 100 \text{ m}$.

Tunnelns längd: $l_t = 27 \text{ s} \cdot (100/3) \text{ m/s} = 900 \text{ m}$.

- b) [3 p.] Den tid det tar för fronten på tåg B att färdas från punkt d till tunnelns ingång är

$$\frac{50 \text{ km}}{120 \text{ km/h}} \approx 0,416667 \text{ h.}$$

Den tid det tar för tåg B att färdas från punkt d tills tåget är helt ute ur tunneln är

$$\frac{50 \text{ km} + 4 \text{ km} + 0,11 \text{ km}}{120 \text{ km/h}} = \frac{54,11 \text{ km}}{120 \text{ km/h}} \approx 0,450917 \text{ h.}$$

Avståndet från punkt e till tunneln är $100 \text{ km} - 54 \text{ km} = 46 \text{ km}$. Den tid det tar för fronten på tåg C att färdas från punkt e tills tunnelns andra ingång är

$$\frac{46 \text{ km}}{160 \text{ km/h}} = 0,2875 \text{ h.}$$

Den tid det tar för tåg C att färdas från punkt e tills tåget är helt ute ur tunneln är

$$\frac{46 \text{ km} + 4 \text{ km} + 0,09 \text{ km}}{160 \text{ km/h}} = \frac{50,09 \text{ km}}{160 \text{ km/h}} \approx 0,313063 \text{ h.}$$

Därför är tåg C helt ute ur tunneln innan fronten på tåg B når ingången till tunneln. Tågen kolliderar inte.

Matematik | Uppgift 3.

a) [2 p.] Vi ser att

$$\int_1^9 3\sqrt{x} \, dx = \int_1^9 3 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} = \int_1^9 2x^{3/2} = 2 \cdot 9^{3/2} - 2 \cdot 1^{3/2} = 2 \cdot 27 - 2 = 52.$$

b) [2 p.] Vi ser att

$$\int_{-1}^1 (2 \sin x + 2) \, dx = \int_{-1}^1 2 \sin x \, dx + \int_{-1}^1 2 \, dx = 2 \int_{-1}^1 \sin x \, dx + \int_{-1}^1 2 \, dx.$$

På grund av att $\sin x$ är en udda funktion, får vi $\int_{-1}^1 \sin x \, dx = 0$. Därför

$$2 \int_{-1}^1 \sin x \, dx + \int_{-1}^1 2 \, dx = 0 + \int_{-1}^1 2 \, dx = \int_{-1}^1 2 \, dx = \int_{-1}^1 2x = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 4.$$

c) [2 p.] Vi söker först nollställena till polynomet $x^2 - 3x - 4$. De är

$$\frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = 4$$

och

$$\frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = -1.$$

Eftersom parabeln öppnas uppåt, spjälkar vi integralen i tre delar på följande sett:

$$\int_{-2}^5 |x^2 - 3x - 4| \, dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 3x - 4) \, dx + \int_{-1}^4 -(x^2 - 3x - 4) \, dx + \int_4^5 (x^2 - 3x - 4) \, dx.$$

Vi ser att

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} (x^2 - 3x - 4) \, dx &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) \right) = \frac{17}{6}, \\ \int_{-1}^4 -(x^2 - 3x - 4) \, dx &= - \int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 4) \, dx = - \int_{-1}^4 \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \\ &= - \left(\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot (4)^2 - 4 \cdot (4) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \right) \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \int_4^5 (x^2 - 3x - 4) \, dx &= \int_4^5 \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \\ &= \frac{1}{3} \cdot (5)^3 - \frac{3}{2} \cdot (5)^2 - 4 \cdot (5) - \left(\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot (4)^2 - 4 \cdot (4) \right) = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

Därför är integralen

$$\int_{-2}^5 |x^2 - 3x - 4| \, dx = \frac{17}{6} + \frac{125}{6} + \frac{17}{6} = \frac{53}{2}.$$

Fysik | Uppgift 1.

- a) [2 p.] Med hjälp av Snells lag kan man beräkna brytningsvinkeln α_2 , då man känner brytningsindexen n_1 och n_2 samt infallsvinkeln α_1 : $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$.

Således: $n_{\text{is}} \sin \alpha_{\text{is}} = n_{\text{luft}} \sin \alpha_{\text{luft}}$ och $n_{\text{vatten}} \sin \alpha_{\text{vatten}} = n_{\text{is}} \sin \alpha_{\text{is}}$.

Insätter det första uttrycket i det senare.

$$\text{Vi får: } \sin \alpha_{\text{vatten}} = \frac{n_{\text{luft}}}{n_{\text{vatten}}} \sin \alpha_{\text{luft}} = \frac{1,000}{1,333} \sin 25^\circ \Rightarrow \alpha_{\text{vatten}} = 18,48^\circ \approx 18^\circ.$$

- b) [2 p.] Enligt Arkimedes lag så utsätts en kropp som nedsänks i en fluid för en flytkraft N , vars belopp är lika med den undanträngda fluidens tyngd. I detta fall är den undanträngda fluidens volym lika med den del av isblockets volym som ligger under vattenytan V_x . Då isblocket flyter befinner det sig i jämvikt, så att summan av krafterna som verkar på det är 0: $\Sigma F = N - G = 0 \Rightarrow N = G$, där G är isblockets tyngd.

$$N = G \Rightarrow \rho_{\text{vatten}} \cdot V_x \cdot g = m_{\text{is}} \cdot g = \rho_{\text{is}} \cdot V_{\text{is}} \cdot g$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{vatten}} \cdot V_x = \rho_{\text{is}} \cdot V_{\text{is}} \Rightarrow \frac{V_x}{V_{\text{is}}} = \frac{\rho_{\text{is}}}{\rho_{\text{vatten}}} = \frac{0,915 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1,005 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 0,9104.$$

Under vattenytan finns således $0,9104 \text{ m}^3$ och ovanför $(1,0000 - 0,9104) \text{ m}^3 = 0,0896 \text{ m}^3$. Eftersom blocket är en kub har samtliga sidor längden 1,0 m. Eftersom den övre och undre ytan har arean $A = 1,0 \text{ m}^2$, kan höjden för den del h som är ovanför vattenytan beräknas från uttrycket för volymen $V = Ah \Rightarrow h = \frac{V}{A} = 0,0896 \text{ m} \approx 9,0 \text{ cm}$.

- c) [2 p.] För smältning krävs värmemängden $Q = sm$, där s är materialets smältvärme och m dess massa. Då Q är värmen som tillförts systemet under tiden t , är värmeflödet som tillförts i medeltal $\frac{Q}{t}$ som motsvarar smältningseffekten P i medeltal. Alltså $P = \frac{Q}{t} = \frac{sm}{t}$.

$$t = 21 \text{ d} \cdot 24 \frac{\text{h}}{\text{d}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = 1814400 \text{ s}.$$

$$P = \frac{sm}{t} = \frac{s \cdot \rho_{\text{is}} \cdot V_{\text{is}}}{t} = \frac{333 \frac{\text{J}}{\text{g}} \cdot 0,915 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1000000 \text{ cm}^3}{1814400 \text{ s}} = 167,9 \frac{\text{J}}{\text{s}} \approx 170 \text{ W}.$$

Fysik | Uppgift 2.

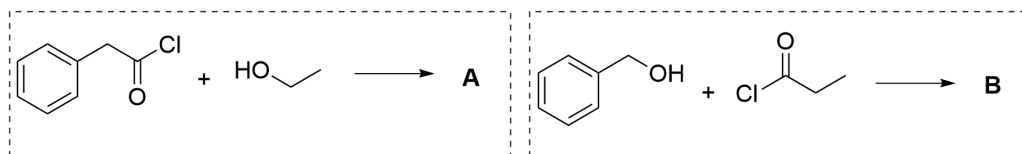
1. [1 p.] B.
2. [1 p.] B.
3. [1 p.] C.
4. [1 p.] A.
5. [1 p.] D.
6. [1 p.] A.

Kemi | Uppgift 1.

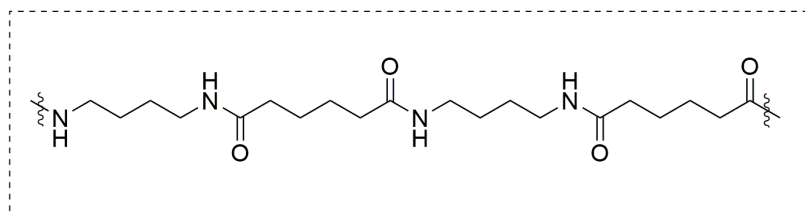
1. [1 p.] B
2. [1 p.] D
3. [1 p.] C
4. [1 p.] B
5. [1 p.] C
6. (1 p.) D

Kemi | Uppgift 2.

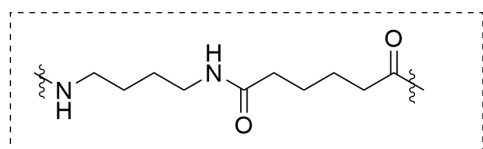
1. [1 p.]



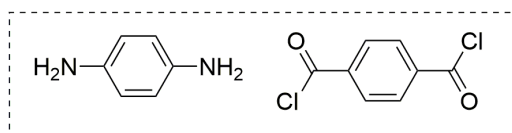
2. [1 p.]



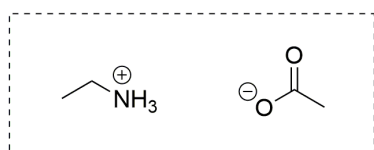
eller



3. [1 p.]



4. [1 p.]



På grund av en skiljaktighet mellan språkversioner godkänns även strukturformler för produkter som bildas i syra-basreaktionen mellan ättiksyra och etandiamin.

5. [2 p.]

Reagensernas substansmängder:

Ättiksyra:

$$m = \rho V = 1,05 \frac{\text{g}}{\text{ml}} \cdot 10,0 \text{ ml} = 10,5 \text{ g}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{10,5 \text{ g}}{60,05 \text{ g/mol}} = 0,17485 \text{ mol}$$

Isoamylalkohol:

$$m = \rho V = 0,81 \frac{\text{g}}{\text{ml}} \cdot 10,0 \text{ ml} = 8,1 \text{ g}$$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{8,1 \text{ g}}{88,15 \text{ g/mol}} = 0,091889 \text{ mol}$$

Ättiksyra och isoamylalkohol reagerar 1:1 (svavelsyran fungerar som katalysator),
därmed är **isoamylalkohol den begränsande reagensen**.

Det teoretiska utbytet för isoamylalkohol uttryckt i mol:

$$n(\text{isoamylacetat}) = n(\text{isoamylalkohol}) = 0,091889 \text{ mol} \approx \mathbf{0,0919 \text{ mol}}$$

Molmassan för isoamylacetat kan beräknas genom att subtrahera vattnets molmassa
från reagensernas sammanlagda molmassa:

$$M_{\text{isoamylacetat}} = M_{\text{ättiksyra}} + M_{\text{isoamylalkohol}} - M_{\text{vatten}}$$

$$M_{\text{isoamylacetat}} = 60,05 \frac{\text{g}}{\text{mol}} + 88,15 \frac{\text{g}}{\text{mol}} - 18,02 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 130,18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Det teoretiska utbytet för isoamylacetat uttryckt i gram:

$$m(\text{isoamylacetat}) = n \cdot M = 0,091889 \text{ mol} \cdot 130,18 \text{ g/mol} = 11,962 \text{ g}.$$

$$\text{Reaktionens procentuella utbyte} = (6,67 \text{ g} / 11,962 \text{ g}) \cdot 100 \% = \mathbf{55,8 \%}$$

eller

$$\begin{aligned} \text{Reaktionens procentuella utbyte} &= \frac{\frac{6,67 \text{ g}}{130,18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}}{0,091889 \text{ mol}} \cdot 100 \% = \frac{0,051237 \text{ mol}}{0,091889 \text{ mol}} \cdot 100 \% \\ &= \mathbf{55,8 \%} \end{aligned}$$

Problemlösning | Uppgift 1.

1. [1 p] D.
2. [1 p] A.
3. [1 p] C.
4. [1 p] D.
5. [1 p] B.
6. [1 p] B.

Problemlösning | Uppgift 2.

Deluppgift 1. [2 p].

- Signalfel dvs. nod H22, har flest (fem) omedelbara följder, dvs. andra riskfaktorer eller händelser som påföljd.
- Att eliminera noden H22, vars out-degree är störst, skulle sannolikt minska flest farliga situationer, i och med att det inte finns annan information om t.ex. hur vanliga händelserna är.

Deluppgift 2. [2 p]

Alla händelsekedjor som innehåller exakt tre noder där den sista händelsen är explosion (H11) är:

Förgiftning → Terrorism → Explosion

Terrorism → Brand → Explosion

Rökning → Brand → Explosion

Störning i elektrisk utrustning → Brand → Explosion

Urspårning → Brand → Explosion

Krock med annat tåg → Brand → Explosion

Nonchalant ledarskap → Brand → Explosion

(Explosion → Brand → Explosion)

ELLER:

H17 → H25 → H11

H25 → H13 → H11

H21 → H13 → H11

H9 → H13 → H11

H7 → H13 → H11

H4 → H13 → H11

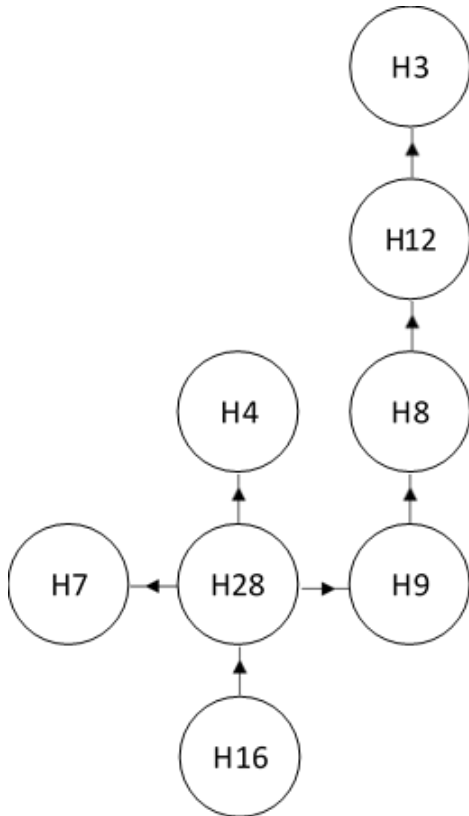
H16 → H13 → H11

(H11 → H13 → H11)

- I de flesta av händelsekedjorna är brand den händelse som föregår explosion.
- Terrorism kan leda till både explosion och brand, som i sin tur kan leda till explosion.
- Brand är klart den mest sannolika händelsen som direkt föregår explosion.

Deluppgift 3. [2 p]

- Vi tar bort noderna H13 och H27 från nätverksdiagrammet.
- Efter detta ritar vi ett riktat nätverksdiagram med start i noden H16, dvs. nonchalant ledarskap



Exempelkriterier för val av den farligaste händelsekedjan:

- Händelserna kan ha andra följder än de som presenteras i nätverksdiagrammet.
- Varje enskild nod i händelsekedjan är i sig en mer eller mindre allvarlig följd.
- En längre händelsekedja kan vara farligare eftersom den orsakar flera skador under en viss tid, såvida information om sannolikhet inte har getts.
- I det här fallet innehåller den längsta händelsekedjan bl.a. elstöt, fall och krock med annan människa, dvs. tre direkta personskador.
- Krock med ett annat tåg eller urspårning kan orsaka stora personskador.
- Krock med ett annat tåg är i princip en farligare händelse än urspårning eftersom två tåg är inblandade i olyckan.

Den farligaste händelsekedjan som är kvar är antingen:

Nonchalant ledarskap → Förbrytelse → Störning i elektrisk utrustning → Elstöt → Fall → Krock med människa.
(Dvs. H16 → H28 → H9 → H8 → H12 → H3.)

ELLER

Nonchalant ledarskap → Förbrytelse → Krock med annat tåg. (Dvs. H16 → H28 → H4.)