

- A1. Määritä suorien $ax + y = 2$ ja $x - y = 3$ leikkauspiste. Millä vakion a arvoilla leikkauspisteen molemmat koordinaatit ovat positiiviset?
- A2. Henkilön palkasta on aiemmin pidätetty ennakkoveroa 31%. Kun henkilö saa 60 euron korotuksen bruttopalkkaansa, hänen nettopalkkansa (eli käteen jäävä palkan osa) kasvaa vain 21 euroa, koska samalla ennakkovero on kasvanut 2 prosenttiyksikköä. Kuinka paljon henkilön brutto- ja nettopalkka olivat palkankorotuksen jälkeen?
- A3. Nelikulmion sivut ovat a , 5, 7 ja b . Ensimmäisen ja toisen sivun välinen kulma on 60° sekä toisen ja kolmannen välinen kulma 165° . Mikä on lyhin mahdollinen sivun b pituus? Määritä tässä tapauksessa myös sivun a pituus. (Anna tarkat vastaukset ja likiarvot 2 desimaalin tarkkuudella.)
- A4. Partikkeli, joka liikkuu xy -tasossa, lähtee liikkeelle origosta. Ensimmäisessä vaiheessa se kulkee pitkin x -akselia pisteeseen $(1, 0)$. Sen jälkeen partikkelin reitti saadaan toistamalla seuraavaa: partikkeli kääntyy 90° vasempaan ja etenee suoraviivaisesti matkan, joka on $2/3$ edellisessä vaiheessa kuljetusta matkasta. Piirrä kuva partikkelin reitistä, kun ainakin 5 toistoa on tapahtunut. Mitä xy -tason pistettä partikkeli lähestyy, kun toistojen määrä kasvaa rajatta?
- A5. Pöydälle asetetuista kolmesta r -säteisestä biljardipallosta jokainen pallo koskettaa kahta muuta palloa.
- Kuinka suuri voi enintään olla sellaisen pallon säde, joka mahtuu putoamaan pöydälle biljardipallojen välistä?
 - Kuinka suuri voi enintään olla sellaisen pallon säde, joka mahtuu olemaan pöydällä biljardipallojen välissä?
- (Anna säteiden tarkat arvot)
- A6. 200 litran sadevesitynnyrissä, joka on suoraa ympyrälieriön muotoinen, korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan suhde on 3:2. Kun tynnyriä kallistettiin 30° , tynnyrissä ollut vesi alkoi virrata reunan yli. Kuinka paljon tynnyrissä oli vettä? (Anna vastaus litroissa yhden desimaalin tarkkuudella.)

- A1. Bestäm skärningspunkten mellan de räta linjerna $ax + y = 2$ och $x - y = 3$. För vilka värden på konstanten a är skärningspunktens vardera koordinater positiva?
- A2. Av en persons lön har tidigare innehållits en förskottsskatt på 31%. Då personen får en löneförhöjning på 60 euro, växer hans nettolön (den summa han får i handen) med endast 21 euro, på grund av att förskottsskatten samtidigt har stigit med 2 procentenheter. Bestäm storleken av personens brutto- och nettolön efter löneförhöjningen.
- A3. En fyrhörning har sidorna a , 5, 7 och b . Vinkeln mellan den första och den andra sidan är 60° , och vinkeln mellan den andra och den tredje sidan 165° . Vilket är det minsta möjliga värdet på (längden av) sidan b ? Hur lång är sidan a i detta fall? (Exakta värden samt närmevärden med 2 decimaler)
- A4. En partikel rör sig i xy -planet, utgående från origo. Den rör sig först längs x -axeln till punkten $(1, 0)$. Därefter bildas partikelns bana genom en upprepning av följande procedur: partikeln vänder 90° till vänster och avancerar rätlinjigt en sträcka, som är $2/3$ av den i det föregående skedet tillryggalagda sträckan. Rita en figur av den tillryggalagda vägen efter åtminstone 5 upprepningar. Vilken punkt i xy -planet närmar sig partikeln, då antalet upprepningar växer obegränsat?
- A5. Tre biljardbollar med radien r har placerats på ett bord. Var och en av bollarna berör de två andra bollarna.
- Hur stor kan radien på sin höjd vara hos en boll, som kan fällas ned mellan biljardbollarna på bordet?
 - Hur stor kan radien på sin höjd vara hos en boll, som ligger på bordet mellan biljardbollarna?
- (Svar med exakta värden på radierna.)
- A6. En 200 liters regnvattenstunna har formen av en rät cirkelcylinder. Förhållandet mellan tunnans höjd och dess bottencirkelns diameter är 3:2. Då tunnan lutades 30° , började tunnans vatten rinna över kanten. Hur mycket vatten innehöll tunnan? (Svar i liter med en decimal noggrannhet.)

- B1. Määritä suorien $ax + y = 4$ ja $x - y = 5$ leikkauspiste. Millä vakion a arvoilla leikkauspisteen molemmat koordinaatit ovat positiiviset?
- B2. Henkilön palkasta on aiemmin pidätetty ennakkoveroa 27%. Kun henkilö saa 60 euron korotuksen bruttopalkkaansa, hänen nettopalkkansa (eli käteen jäävä palkan osa) kasvaa vain 23 euroa, koska samalla ennakkovero on kasvanut 2 prosenttiyksikköä. Kuinka paljon henkilön brutto- ja nettopalkka olivat palkankorotuksen jälkeen?
- B3. Nelikulmion sivut ovat a , 7, 5 ja b . Ensimmäisen ja toisen sivun välinen kulma on 60° sekä toisen ja kolmannen välinen kulma 165° . Mikä on lyhin mahdollinen sivun b pituus? Määritä tässä tapauksessa myös sivun a pituus. (Anna tarkat vastaukset ja likiarvot 2 desimaalin tarkkuudella.)
- B4. Partikkeli, joka liikkuu xy -tasossa, lähtee liikkeelle origosta. Ensimmäisessä vaiheessa se kulkee pitkin y -akselia pisteeseen $(0, 1)$. Sen jälkeen partikkelin reitti saadaan toistamalla seuraavaa: partikkeli kääntyy 90° oikeaan ja etenee suoraviivaisesti matkan, joka on $2/3$ edellisessä vaiheessa kuljetusta matkasta. Piirrä kuva partikkelin reitistä, kun ainakin 5 toistoa on tapahtunut. Mitä xy -tason pistettä partikkeli lähestyy, kun toistojen määrä kasvaa rajatta?
- B5. Pöydälle asetetuista kolmesta r -säteisestä biljardipallosta jokainen pallo koskettaa kahta muuta palloa.
- Kuinka suuri voi enintään olla sellaisen pallon säde, joka mahtuu putoamaan pöydälle biljardipallojen välistä?
 - Kuinka suuri voi enintään olla sellaisen pallon säde, joka mahtuu olemaan pöydällä biljardipallojen välissä?
- (Anna säteiden tarkat arvot)
- B6. 200 litran sadevesitynnyrissä, joka on suoran ympyrälieriön muotoinen, korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan suhde on 3:2. Kun tynnyriä kallistettiin 30° , tynnyrissä ollut vesi alkoi virrata reunan yli. Kuinka paljon tynnyrissä oli vettä? (Anna vastaus litroissa yhden desimaalin tarkkuudella.)

- B1. Bestäm skärningspunkten mellan de räta linjerna $ax + y = 4$ och $x - y = 5$. För vilka värden på konstanten a är skärningspunktens vardera koordinater positiva?
- B2. Av en persons lön har tidigare innehållits en förskottsskatt på 27%. Då personen får en löneförhöjning på 60 euro, växer hans nettolön (den summa han får i handen) med endast 23 euro, på grund av att förskottsskatten samtidigt har stigit med 2 procentenheter. Bestäm storleken av personens brutto- och nettolön efter löneförhöjningen.
- B3. En fyrhörning har sidorna a , 7, 5 och b . Vinkeln mellan den första och den andra sidan är 60° , och vinkeln mellan den andra och den tredje sidan 165° . Vilket är det minsta möjliga värdet på (längden av) sidan b ? Hur lång är sidan a i detta fall? (Exakta värden samt närmevärden med 2 decimaler)
- B4. En partikel rör sig i xy -planet, utgående från origo. Den rör sig först längs y -axeln till punkten $(0, 1)$. Därefter bildas partikelns bana genom en upprepning av följande procedur: partikeln vänder 90° till höger och avancerar rätlinjigt en sträcka, som är $2/3$ av den i det föregående skedet tillryggalagda sträckan. Rita en figur av den tillryggalagda vägen efter åtminstone 5 upprepningar. Vilken punkt i xy -planet närmar sig partikeln, då antalet upprepningar växer obegränsat?
- B5. Tre biljardbollar med radien r har placerats på ett bord. Var och en av bollarna berör de två andra bollarna.
- Hur stor kan radien på sin höjd vara hos en boll, som kan fällas ned mellan biljardbollarna på bordet?
 - Hur stor kan radien på sin höjd vara hos en boll, som ligger på bordet mellan biljardbollarna?
- (Svar med exakta värden på radierna.)
- B6. En 200 liters regnvattenstunna har formen av en rät cirkelcylinder. Förhållandet mellan tunnans höjd och dess bottencirkelns diameter är 3:2. Då tunnan lutades 30° , började tunnans vatten rinna över kanten. Hur mycket vatten innehöll tunnan? (Svar i liter med en decimal noggrannhet.)

1. Sarja A $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Helposti eliminoimalla, kun $a \neq -1$, saadaan $x = \frac{5}{a+1}$ ja $y = \frac{2-3a}{a+1}$. **3 pist.**

Vaaditaan, että molemmat koordinaatit x ja y positiiviset. Tällöin $x > 0 \Rightarrow a + 1 > 0 \Rightarrow a > -1$, ja $y > 0 \Rightarrow 2 - 3a > 0 \Rightarrow a < 2/3$. Siis on oltava $-1 < a < 2/3$. **3 pist.**

Sarja B $\begin{cases} ax + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Vastaavasti, kun $a \neq -1$, on $x = \frac{9}{a+1}$ ja $y = \frac{4-5a}{a+1}$. Positiivisuusehto on $-1 < a < 4/5$.

2. Merkitään $b =$ bruttopalkka (ennen), $p =$ ennakonpidätysprosentti (ennen)/100 ja $K =$ nettopalkan eli käteenjäävän palkan korotus. Tällöin

	ennen	jälkeen
brutto	b	$b + 60$
netto	$(1 - p)b$	$(1 - p)b + K$

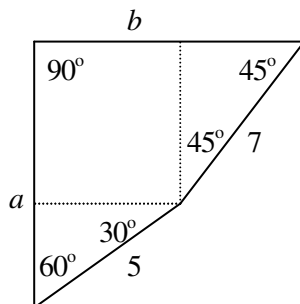
Taulukon tiedoilla voidaan kirjoittaa ehto $(1 - p)b + K = [1 - (p + 0.02)](b + 60)$. **3 pist.**
 Tästä

$$b = \frac{60(1 - p - 0.02) - K}{0.02}$$

Sarja A: $p = 0.31$ ja $K = 21 \Rightarrow b = 960$. Tällöin
 bruttopalkka korotuksen jälkeen on $960 + 60 = \mathbf{1020}$ euroa
 nettopalkka korotuksen jälkeen on $(1 - 0.33)1020 = \mathbf{683.40}$ euroa **3 pist.**

Sarja A: $p = 0.27$ ja $K = 23 \Rightarrow b = 980$. Tällöin
 bruttopalkka korotuksen jälkeen on $980 + 60 = \mathbf{1040}$ euroa
 nettopalkka korotuksen jälkeen on $(1 - 0.29)1040 = \mathbf{738.40}$ euroa

3. Ilmeisesti lyhin b saadaan kohtisuoruustilanteessa kahdesta peruskolmiosta lukemalla



Sarja A $b = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) \approx 9.28$ **3 pist.**

$a = \frac{5}{2} + \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(5 + 7\sqrt{2}) \approx 7.45$ **3 pist.**

Sarja B, jossa luvut 5 ja 7 vaihtaneet paikkaa

$b = \frac{7}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(7\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) \approx 9.60$

$a = \frac{7}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(7 + 5\sqrt{2}) \approx 7.04$

4. Kuva Sarjaan A. Kuva sarjassa B on peilikuva suoran $y = x$ suhteen. **2 pist.**

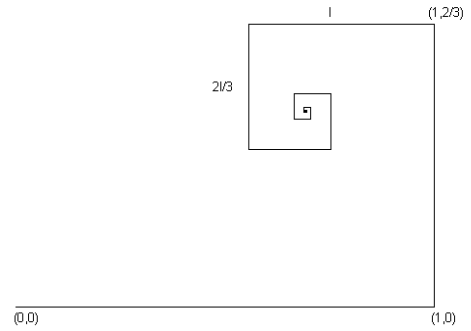
Havaitaan, että Sarjan A tapauksessa prosessissa lähestytään pistettä (a, b) , jossa

$$a = 1 + 0 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 0 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 0 - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - (-4/9)} = \frac{9}{13}$$

$$b = 0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 0 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 0 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 0 - \dots = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right] = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - (-4/9)} = \frac{2}{3} \frac{9}{13} = \frac{6}{13}.$$

Siis $(a, b) = \left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$. Sarjassa B piste (peilauksen perusteella) on $(a, b) = \left(\frac{6}{13}, \frac{9}{13}\right)$ **2+2 pist.**



5. Olkoon $r =$ biljardipallon säde
 a) Jos $x =$ pudotettavan pallon säteen enimmäiskoko, niin kuvasta

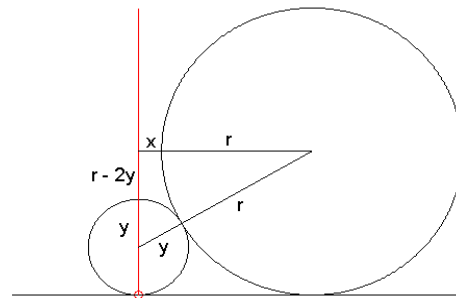
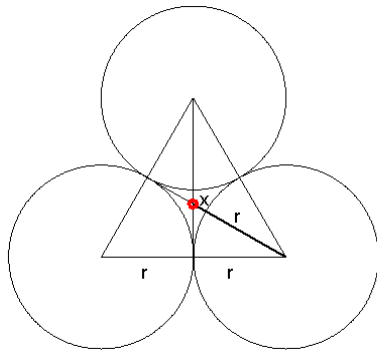
$$x + r = \frac{2r}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}r$$
 3 pist.

- b) Kun piirretään tilanteesta sivukuva pystytasolle pitkin korkeusjanaa

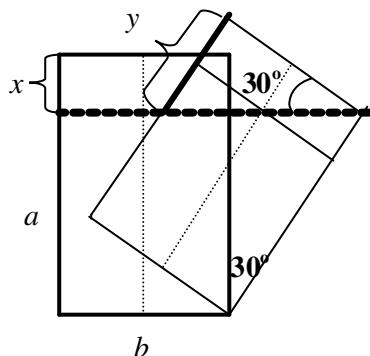
$$(y + r)^2 = (x + r)^2 + (r - y)^2,$$

missä y on kysytyn pallon säteen enimmäiskoko. Sijoitetaan $x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}r$. Tällöin

$$(y + r)^2 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 + (r - y)^2 \Rightarrow 4yr = \frac{4}{3}r^2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}r$$
 3 pist.



- 6.



Olkoon $a =$ säiliön korkeus, $b =$ säiliön leveys

Koska kallistuskulma on 30° , on $y = b/\sqrt{3}$.

Kallistuksessa vesimäärä ei muutu. Siten

$$x = y/2 = b\sqrt{3}/6.$$

Koska $a/b = 3/2$, niin $b = 2a/3$. Tällöin $x = \frac{1}{9}a\sqrt{3}$. **4 pist.**

Sadevesitynnyrin vesimääräksi voidaan nyt laskea

$$V = 200 \frac{a-x}{a} = 200 \left(1 - \frac{x}{a}\right) = 200 \left(1 - \frac{1}{9}\sqrt{3}\right) \approx 161.5 l$$

2 pist.