Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. **Liite:** Kaavakokoelma. **Apuvälineet:** Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

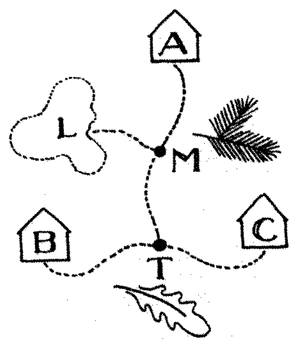
a1 Jauhoa myydään keskenään yhdenmuotoisissa pakkauksissa. Pienemmän pakkauksen suurin korkeus on 11 cm ja suuremman 17 cm. Pienemmän pakkauksen hinta on 2,90 € ja suuremman 9,70 €. Kuinka monta prosenttia halvempaa (tai kalliimpaa) yksikköhinnaltaan jauho on suuremmassa pakkauksessa kuin pienemmessä pakkauksessa?

Tehtävässä yksikköhinta lasketaan tilavuusyksikköä kohden, ja pakkaukset ovat täysiä. Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

a2 Lammelta L mökeille A, B ja C lähtevä polku haarautuu männyn M ja tammen T juurella (kuva 1). Lammelta lähtevä kulkija kääntyy männyn kohdalla kulkusuuntaansa nähden oikealle todennäköisyydellä $p = 0{,}61$ ja kääntyy vastaavasti tammen kohdalla oikealle todennäköisyydellä $q = 0{,}71$. Kulkijat eivät käänny takaisin tulosuuntaansa.

Iltapäivän kuluessa lammelta lähtee kaksi toisistaan tietämätöntä samoilijaa mökkejä kohden. Millä todennäköisyydellä molemmat kulkijat päätyvät illaksi (a) mökille B, (b) samalle mökille?

Anna vastaukset kahden desimaalin tarkkuudella.



Kuva 1: Kartta poluista tehtävään a2.

a3 Tasaisella alustalla makaa kaksi identtistä poikkileikkaukseltaan ympyränmuotoista, suoraa tankoa. Vierekkäin asetettujen tankojen väliin on asetettu kolmas tanko. Kolmas tanko on halkaisijaltaan pienempi mutta muuten samanlainen kuin suuremmat tangot. Kaikki kolme tankoa sivuavat toisiaan koko pituudeltaan, ja niiden yläreunat asettuvat samalle tasolle. Mikä on raskaamman tangon massa, kun kevyemmän tangon massa on 15 kg?

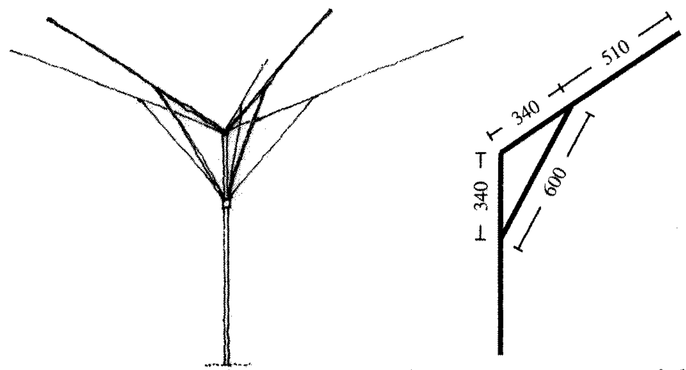
a4 Ohut rima katkaistaan kolmeen osaan. Ensimmäisen osan pituus on neljäsosa koko riman pituudesta, toinen osa on ensimmäistä osaa metriä pidempi. Asettamalla rimat päistään toisiinsa kiinni muodostuu suorakulmainen kolmio. Mitä voidaan päätellä alkuperäisen riman pituudesta?

a5 Puolisuunnikkaan kärjet ovat paraabelin $y = x^2$ ja suorien $y = 1$ tai $y = t$ leikkauspisteissä. Määritä luku t, missä $0 < t < 1$, siten että puolisuunnikkaan ala on mahdollisimman suuri.

a6 Pyykinkuivausteline koostuu pystysuorasta ohuesta putkesta ja viidestä siitä symmetrisesti ulkonevasta identtisestä haarasta mittapiirroksen 2 mukaisesti.

Haarojen kautta kiinnitetään pyykkinarua kehiksi. Kuinka paljon narua vähintään tarvitaan yhteen kierrokseen, joka kulkee haarojen ulkokärkien kautta?

Anna vastaus täysinä senttimetreinä.



Kuva 2: Pyykkitelineen havainnekuva ja mittapiirros yhdestä haarasta. Kaikki mitat on annettu millimetreinä.

Diplomi-insinöörien ja arkkitehtien yhteisvalinta 2007
Arkkitehtivalinnan matematiikan koe 21.5.2007
Ratkaisut ja pisteytys

1\. Olk. s_1 pienen ja s_2 suuren pakk. korkeus, $s_1 = 11$ cm ja $s_2 = 17$ c
h_1 —"— ja h_2 —"— hinta, $h_1 = 2{,}90$ € ja $h_2 = 9.70$ €
V_1 —"— ja V_2 —"— tilavuus
c_1 —"— ja c_2 —"— yksikköhinta

Tällöin $c_1 = h_1/V_1$ ja $c_2 = h_2/V_2$, joten vertailu antaa

$$\frac{c_2-c_1}{c_1}\cdot 100\,\% = \left(\frac{c_2}{c_1}-1\right)\cdot 100\,\%$$

Koska yhdenmuotoisuuden perusteella $V_1/V_2 = (s_1/s_2)^3$, saa

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{h_2/V_2}{h_1/V_1} = \frac{h_2}{h_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_2}{h_1}\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^3 = \frac{9.70}{2.90}\left(\frac{11}{17}\right)^3 = 0.90616\ldots$$

Tällöin

$$(c_2/c_1 - 1)\cdot 100\,\% = -9.38397\ldots\,\%,$$

eli suurempi pakk. on 9.38 % halvempi kuin pienempi pakk.

vertailu 3p
yhden.m 3p

2\. Männyn luona oikealle, tn $p = 0.61$
Tammen —"— —"—, tn $q = 0.71$

a) Samoilija päätyy mökille B tn:llä pq
Kaksi samoilijaa päätyy mökille B tn:llä

$$(pq)^2 = (0.61\cdot 0.71)^2 = 0.18757\ldots \approx 0.19$$

3p

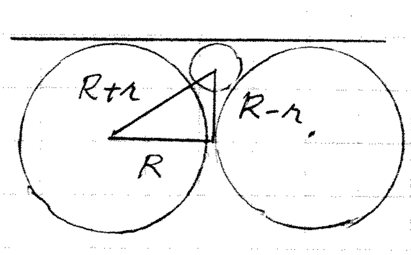
b) Vast. kaksi samoilijaa päätyy mökille C tn:llä $[p(1-q)]^2$ ja mökille A tn:llä $(1-p)^2$. Koska tapahtumat ovat poissulkevia, samoilijat päätyvät samalle mökille (eli mökille A tai B tai C) tn:llä

$$(1-p)^2 + (pq)^2 + [p(1-q)]^2 = (1-0.61)^2 + (0.61\cdot 0.71)^2 + [0.61(1-0.71)]^2$$
$$= 0.3709692\ldots \approx 0.37$$

3p

3\. Olk. R isomman ja r pienemmän tangon poikkileikkauksen säde ja vast. M isomman ja m pienemmän tangon massa. Tällöin

$$(R+r)^2 = R^2 + (R-r)^2 \Rightarrow R = 4r$$



3p

Jos L = tankojen pituus, niin

$$\frac{M}{m} = \frac{\pi R^2 L}{\pi r^2 L} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{4r}{r}\right)^2 = 16$$

Tällöin, kun $m = 15$ kg, on $M = 16\cdot 15$ kg $= 240$ kg

3p

4. Koko riman pituus $= 4a$ $(a>0)$
Olkoon lyhyin (eli ensimm.) osa $= a$. Toinen osa $= a+1$, kolmas osa $= 4a - a - (a+1) = 2a-1$. Tällöin, koska $2a-1>0$, on $a > 1/2$. 2p

Kun $a > 1/2$, niin joko $a+1$ tai $2a-1$ on pisin pala eli kolmion hypotenuusa. Jos $a+1$ on pisin pala, niin

$$|2a-1| \le |a+1| \iff 2a-1 \le a+1 \iff a \le 2.$$

Tässä tapauksessa, eli kun $1/2 < a \le 2$, siis eli kun $a+1$ on hypotenuusa, suorakulm. kolmion perusteella on

$$(a+1)^2 = a^2 + (2a-1)^2 \iff 4a^2 - 6a = 0,$$

eli $a = 3/2$. 2p

Kun $a > 1/2$ ja $2a+1$ on pisin pala, on

$$|a+1| \le |2a-1| \iff a+1 \le 2a-1 \iff a \ge 2.$$

Tässä tapauksessa, eli kun $a \ge 2$, siis eli kun $2a-1$ on hypotenuusa, suorakulm. kolmion perusteella on

$$(2a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2 \iff 2a^2 - 6a = 0,$$

eli $a = 3$.

Kaiken kaikkiaan kolmio on suorakulmainen kun $a = 3/2$ tai $a = 3$. Tällöin riman pituus $4a$ on 6 tai 12. 2p

5. Paraabelin $y = x^2$ ja suoran $y = t$ leikkauspisteessä on $x = \pm\sqrt{t}$. Tällöin kyseisen puolisuunnikkaan kärjet ovat $(1,1)$, $(-1,1)$, $(\sqrt{t}, t)$ ja $(-\sqrt{t}, t)$. Puolisuunnikkaan pinta-alaksi saadaan

$$A(t) = \frac{2+2\sqrt{t}}{2}\cdot(1-t) = (1+\sqrt{t})(1-t), \quad 0<t<1.$$ 3p

eli $A(x) = (1+x)(1-x^2) = 1 + x - x^2 - x^3$, $0 < x < 1$

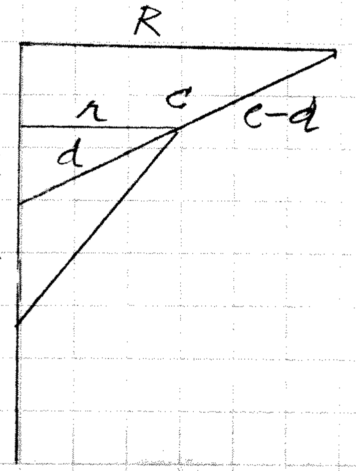
Fktio $A(x)$ on jatkuva ja derivoituva po. välillä.

$$A'(x) = 1 - 2x - 3x^2 = 0 \implies x = -1 \text{ tai } x = 1/3$$

Vain arvo $x = 1/3$ kelpaa. Pinta-ala $A(x)$ saavuttaa absol. maksimin joko tässä pisteessä tai välin $0<x<1$ päätepisteissä. Koska $A(1) = 0$, $A(0) = 1$ ja $A(1/3) = 32/27 > 1$, pinta-alan $A(x)$ maksimi tulee pisteessä $x = 1/3$. Tällöin tulee valita $t = \sqrt{x} = 1/9$ 3p

6. Merk. $d=340$, $b=600$ ja $c=850$

Suorakulm. kolmioista luetaan



$$\begin{cases} r^2+x^2=d^2 \\ r^2+(d+x)^2=b^2 \end{cases}$$

Vähentämällä yhtälöt puolittain saadaan ensin

$$d^2+2dx=b^2-d^2,$$

ja sitten ratkaisemalla

$$x=\frac{b^2-2d^2}{2d}=\frac{b^2}{2d}-d=\frac{600^2}{2\cdot 340}-340=189.411\ldots$$

2p

Edelleen

$$r^2=d^2-x^2 \Rightarrow r=\sqrt{d^2-x^2}=282.352\ldots$$

yhdenmuotoisista kolmioista luetaan $R/r=c/d$, joten

$$R=\frac{c}{d}r=\frac{5}{2}r=705.882\ldots$$

2p

(Itse asiassa on $R=\frac{bc}{2d^2}\sqrt{4d^2-b^2}$.)

Kun telinettä tarkastellaan ylhäältä, haarojen kärjet jäävät etäisyydelle R keskipisteestä ja niiden välinen kulma on $\alpha=2\pi/5$ rad $=72^\circ$. Tällöin kahden kärjen välinen etäisyys on

$$e=2\cdot R\sin(\alpha/2)=829.814\ldots$$

Narun pituudeksi (ilman sidontavaraa) saadaan

$$L=5e=10R\sin(\alpha/2)=4149.072\ldots\,\mathrm{mm}\approx \underline{415\ \mathrm{cm}}$$

2p