

Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa ylivaihamalla* se sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

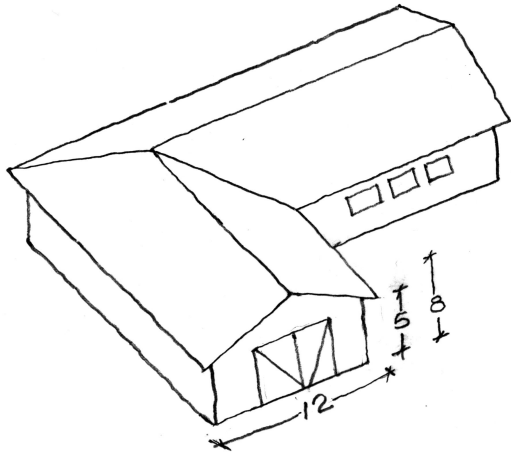
- A1 Pariskunta ottaa asuntolainaa 200 000 €. He sopivat maksavansa pankille 12 000 € kunkin täyden vuoden kuluttua lainan nostamishetkestä. Lainapääomaa lyhennetään vuosittain osalla, joka mainitusta summasta jää korkojen maksun jälkeen.

Ensimmäisenä kahtena vuotena korko on 2,5%. Miten suuri korkoprosentti oli kolmantena vuonna, kun laina tuolloin lyheni vain 478,85 eurolla?

Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

- A2 Harjakattoinen navetta on pohjaltaan suorakulmaisen L-kirjaimen muotoinen. Katon harja on 8 m ja räystäät 5 m korkeudella maanpinnasta. Katon leveys räystäästä räystääseen on 12 m kummassakin siivessä. Katon harja sijaitsee symmetrisesti katon keskellä ja harjan kokonaispituus on 40 m.

Navetan katto maalataan. Kuinka monta 2,7 litran astiaa maalia on ostettava, kun maalilitra peittää 6 m^2 ?



- A3 Kakku on muodoltaan suora ympyräkartio, jonka korkeus on 15 cm. Kakku halutaan leikata pohjan suuntaisilla tasoilla kolmeen tilavudeltaan yhtä suureen osaan. Kuinka korkeita paloista tulee?

Anna vastaukset millimetrin tarkkuudella.

- A4 Olet tallettanut puhelimeesi sveitsiläisen pankkikorttisi tunnusluvun (00000-99999) viisi numeroa satunnaisessa järjestyksessä, mutta unohtanut numeroiden oikean järjestyksen. Millä todennäköisyydellä osut oikeaan jollakin kolmesta eri yrityksestä,

- (a) kun talletettu luku on 28756,
(b) kun talletettu luku on 28755?

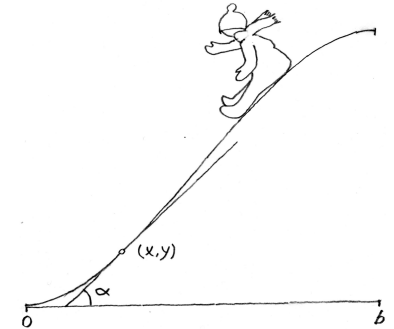
- A5 Liukumäen profiili noudattaa muotoa,

$$y = ax^2(3b - 2x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Tässä x ja y on ilmaistu metreinä ja $a, b > 0$ ovat suunnitteluparametreja.

Kuinka lyhyt liukumäki voi olla (siis kuinka pieni parametri b voi olla), jos sen kaltevuus (kuvassa α) ei missään pisteessä saa ylittää 30° ja liukumäen korkeuseron pitää olla kaksi metriä?

Anna vastaus yhden senttimetrin tarkkuudella.



- A6 Egyptologi Bryggmann näkee laskevassa auringossa, tasaisella aavikolla pyramidin. Pyramidin huippu sijaitsee kompassisuunnassa $31,0^\circ$, pyramidin huipun varjo kompassisuunnassa $52,0^\circ$, aurinko kompassisuunnassa $260,0^\circ$. (Kompassisuunnat mitataan asteina myötäpäivään pohjoisesta.)

Kartasta egyptologi mittaa pyramidin etäisyydeksi (pohjan pisteeseen suoraan huipun alla) 345 m. Edelleen hän mittaa varjonsa pituudeksi kolme kertaa pituutensa.

Näillä tiedoilla hän laskee pyramidin korkeuden. Mikä korkeus on?

Anna vastauksesi metrin tarkkuudella.

Anvisningar. Placera varje uppgift på en egen sida. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

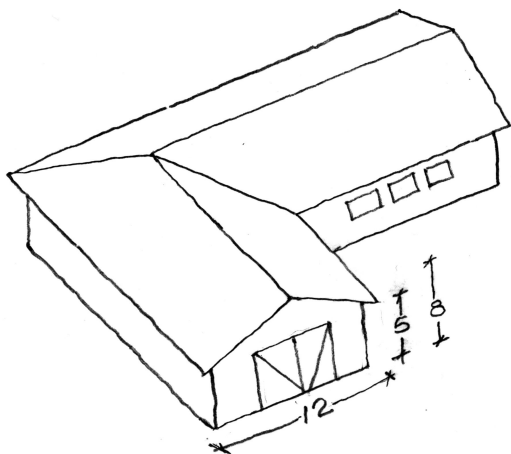
A1 Ett par tar ett bostadslån på 200 000 €. De kommer överens att betala banken 12 000 € i slutet av varje helt år efter att lånet lyftes. Lånet avkortas årligen med den delen av den nämnda summan, som blir över efter att räntan betalats.

Under de första två åren är räntan 2,5%. Hur hög var ränteprocenten tredje året, om lånet avkortades med bara 478,85 euro då?

Ge svaret med två decimalers noggrannhet.

A2 En lada med sadeltak har bottenprofilen i form av bokstaven L med en rät vinkel. Takåsen är 8 m och takfoten 5 m ovanför marken. Takets bredd från takfot till takfot är 12 m i bägge vingarna. Takåsen finns mitt på taket och dess sammanlagda längd är 40 m.

Ladans tak målas. Hur många burker med 2,7 liter färg måste man köpa, om en liter täcker 6 m^2 ?



A3 En kaka har formen av en rät cirkulär kon med höjden 15 cm. Man vill skära kakan i tre delar, alla med lika stor volym, med hjälp av plana snitt parallella med kakans botten. Hur höga kommer bitarna att vara?

Ge svaren med en millimeters noggrannhet.

A4 Du har lagrat de fem siffrorna till nummerkoden (00000-99999) till ditt schweiziska bankkort i en slumpmässig ordning i din telefon, med glömt siffrornas rätta ordning. Med vilken sannolikhet hittar du rätt på något av tre olika försök,

(a) om det lagrade talet är 28756,

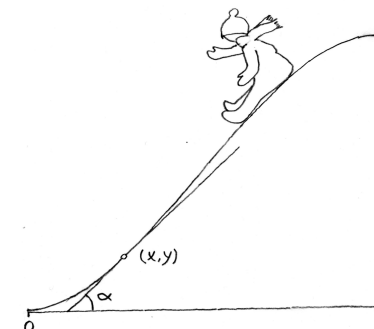
(b) om det lagrade talet är 28755?

A5 Profilen hos en rutschbana har formen

$$y = ax^2(3b - 2x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Här är x och y givna i meter och $a, b > 0$ är planeringsparameter.

Hur kort kan rutschbanan vara (dvs. hur liten kan parametern b vara), om dess lutning (α i figuren) inte får överskrida 30° och om höjdskillnaden hos rutschbanan skall vara två meter.



Ge svaret med en centimeters noggrannhet.

A6 Egyptologen Bryggmann ser en pyramid i den nedgående solens ljus på den plana ökn. Pyramidens topp är i kompassriktningen $31,0^\circ$, skuggan av pyramidens topp i kompassriktningen $52,0^\circ$ och solen i kompassriktningen $260,0^\circ$. (Kompassriktningarna är mätta i grader medsols från norr.)

Från kartan mäter egyptologen avståndet till pyramiden 345 m (till punkten på botten direkt under toppen). Vidare uppmäter han längden hos sin skugga till att vara tre gånger sin längd.

Med denna information beräknar han pyramidens höjd. Vilket var höjden?

Ge svaret med en meters noggrannhet.

Instructions. Reserve a separate page for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps*. Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions*. In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted.

Allowed instruments: Writing instruments, non-programmable calculators, non-electronic general-language dictionaries to/from English. **Attachment:** Table of formulae.

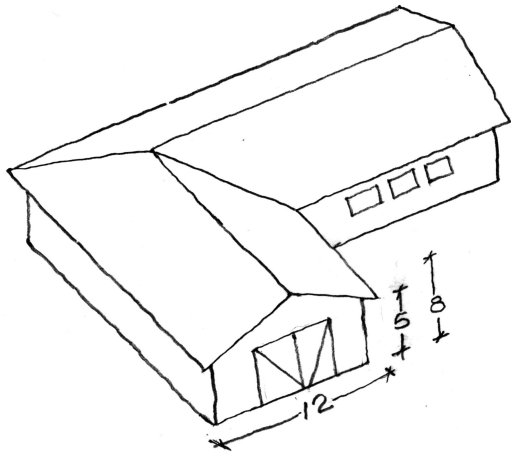
A1 A couple takes a 200 000 € loan to finance an apartment. They agree to pay the bank 12 000 € at end of every full year from the day taking the loan. Each year the capital will be payed off by the amount remaining after payment of the interest.

During the first two years the interest rate is 2.5 %. What is the rate on the third year knowing that the capital that year was paid off by 478.85 euro only?

Give the answers rounded to the accuracy of two decimals.

A2 A barn has a gable roof and a L-shaped plan with right angle. The roof peak is 8 m long and the eaves at the height of 5 m from the ground. The roof is 12 m wide from eave to eave in both wings. The peak of the roof is located symmetrically in the middle of the roof and peaks total length is 40 m.

The roof is to be painted. How many 2.7litre paint containers one needs to buy, when a litre paint covers 6 m^2 ?



A3 An cake has the shape of a right cone with the height of 15 cm. Using planes parallel to the cake bottom the cake is cut into three pieces with the equal volume. What are the heights of the pieces?

Give the answers rounded to the nearest millimeter.

A4 You have stored in your phone the five digits in the pin code (00000-99999) of your Swiss credit card. The digits are in a random order and you have forgotten the correct combination. On what propability do you find the correct combination at one of three different tries,

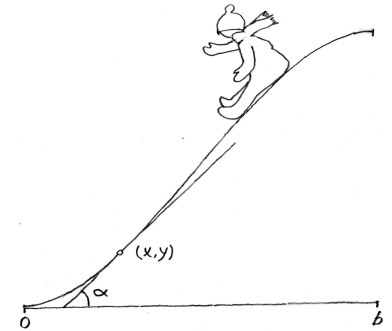
- (a) when the number written down is 28756,
- (b) when the number written down is 28755?

A5 The side profile of a slide has the shape of the curve

$$y = ax^2(3b - 2x), \quad 0 \leq x \leq b.$$

Here x and y are given in meters and $a, b > 0$ are free parameters.

How short can the slide be made (i.e. how small can the parameter b be), when the slope (α in the figure) cannot exceed 30° and the height difference shall be two meters.



Give the answers rounded to the nearest centimeter.

A6 Egyptologist Bryggmann sees, in a sunset, a pyramid on flat desert. The peak of the pyramid is seen in the compass direction 31.0° , the shadow of the peak in the compass direction 52.0° , the Sun in the compass direction 260.0° . (The compass directions are measured clockwise from the North.)

From the map the egyptologist measures the distance to the pyramid (to the point on its bottom directly under its peak) 345 m. Furthermore, he measures the length of his shadow to be three times his length.

Using this information he calculates the height of the pyramid. What is the height?

Give the answers rounded to the nearest meter.

Tehtävä 1

$c_0 = 200000$, $a = 12000$, $r_1 = r_2 = 2,5\%$. lyhennys $d_i = a - c_{i-1}r_i$ ja uusi pääoma $c_i = c_{i-1} - d_i$.

$$c_1 = 193000, c_2 = 185825,$$

Kolmantena vuonna siis

$$r_3 = (a - d_3)/c_2 = 6.20\%.$$

Arvostelu: Ratkaisun ensimmäinen vuosi (+1p), toinen vuosi (+2p), kolmas vuosi (+3p). Muotovirheistä, kuten muodosta korko on 0,062 tai 6,2% vähennetään piste.

Tehtävä 2

Merkitään harjan osien pituuksia a, b . Tiedämme, että $s = a + b = 40$. Katon lape harjasta räystäääseen on $d = \sqrt{(8-5)^2 + (12/2)^2} = 3\sqrt{5}$ pitkä. Katon neljä lapetta ovat puolisuunnikkaita:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a + (a + d)}{2} d + \frac{a + (a - d)}{2} d + \frac{b + (b + d)}{2} d + \frac{b + (b - d)}{2} d \\ &= 2d(a + b) = 240\sqrt{5} \approx 536.6 \end{aligned}$$

neliometriä. Astian riittävyys on $q = (2,7 \times 6) \text{ l/m}^2$, joten maalin menekki on $A/q \approx 33,1$ ja tarvitaan 34 astiaa.

Arvostelu: Mallivastauksessa erottelu puolisuunnikkaiksi (+2p), lausekkeen oikein laskettu (+3p), muunnos astioiksi (+1p). Tehtävässä ratkaisussa on oleellista, että siinä huomioidaan tehtävän kolmiulotteinen luonne. Mikäli tarkastellaan vain projektiota on epäselvää, miten päättely on tehty.

Kuten ratkaisusta näkyy, katon pinta-ala vastaa s pitkää ja $2d$ leveää suorakaidetta. Monessa vastauksessa on pyritty näyttämään ensi tämä ja laskettu näin pinta-ala suoraan lausekkeen $2ds$. Tämä on täysin perusteltua, mutta perustelu on hyväksytty, vain mikäli siitä on käynyt ilmi, että tarkastelu on suoritettu huomioiden tehtävän kolmiulotteinen luonne: mikäli perustelussa on vedottu vain suoraan ylhäältä nähtyyn projektiioon, tehtävästä on annettu vain 3p, koska projektiossa osien mitata eivät skaalautu samassa suhteessa (samansuuntaisetkin eri mittaiset viivat voivat olla eripituisia).

Tehtävän rajoittaminen ilman huolellisia perusteluja tiettyyn erityistapaukseen valitsemalla a :lle ja b :lle arvo, kuten $a = b = 20$, arvostellaan 4p arvoiseksi tehtävästä.

Tehtävä 3

Merkitään palojen korkeutta ylhäältä laskien h_1, h_2, h_3 . Korkeuksille pätee $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Ylimmälle kappaleelle saamme yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksia suhteen perusteella

$$h_1^3 : h^3 = 1 : 3, \quad h_1 = h_1 = (1/3)^{1/3} h.$$

Tarkastellaan nyt kappaletta, jonka muodostavat kaksi ylintä palaa yhdessä. Merkitään sen korkeutta k .

$$k^3 : h^3 = 2 : 3, \quad k = h_1 + h_2 = (2/3)^{1/3} h,$$

Tästä edelleen

$$h_2 = k - h_1 = \left((2/3)^{1/3} - (1/3)^{1/3} \right) h$$

$$h_3 = h - k = \left(1 - (2/3)^{1/3} \right) h$$

Vastaus, kun $h = 150$ mm: $h_1 = 104.00 \dots \approx 104$ mm, $h_2 = 27.03 \dots \approx 27$ mm, $h_3 = 18.96 \dots \approx 19$ mm.

Arvostelu: Tehtävän arvostelu perustuu kahteen osaan: ylimmän palan korkeuden laskeminen (3p) ja kahden muun palan korkeus (3p).

Mikäli tehtävässä tehtävä on ratkaistu vain jossakin erityistapauksessa pisteet ovat korkeintaan 4p.

Tehtävä 4

Kohdassa (a) mahdollisia kombinaatioita on $n = 5! = 120$, joten todennäköisyys epäonnistua

$$1 - p = \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{(n-1)} \frac{(n-3)}{(n-2)} = \frac{n-3}{n} = 1 - \frac{3}{n}$$

eli onnistumiselle

$$p = \frac{3}{n} = \frac{1}{40} = 0.025$$

Kohdassa (b) mahdollisia kombinaatioita on $n = 5!/2! = 60$, joten todennäköisyys onnistua on edellisen perusteella nyt

$$p = \frac{3}{n} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Vaihtoehtoisesti kummassakin kohdassa voidaan tarkastella tapausta, jossa kombinaatioiden (n kpl) joukosta on valittu $m = 3$ kombinaatiota. Todennäköisyys sille, että pankkikortin oikea kombinaatio on valittujen joukossa, on selvästi $p = m/n$.

Arvostelu: Tehtävässä osakysymyksistä annetaan lähtökohtaisesti kummastakin 3p.

Kummassakin alitehtävässä erikseen kombinaatioiden määrästä (n) hyvitetään 1p. Alitehtävän todennäköisyyden laskeminen antaa loput pisteistä. Pääsääntöisesti väärä kombinaatioiden määrä estää hyvittäjästä alitehtävän lopusta riippumatta sen suoritukselta. Perustelun puuttumisesta vastausta on sakotettu lähtökohtaisesti 1p.

Mikäli tarkastellaan kolmea nostoa, ne eivät muodosta kolmea riippumatonta alkeistapausta: esimerkkinä väärästä väitteestä on: *tapahtuma/nostot ovat riippumattomia, joten kysytty todennäköisyys $p = 1/n + 1/n + 1/n$.*

Tehtävä 5

$$y = ax^2(3b - 2x) = a(3bx^2 - 2x^3)$$

$$k := \tan \alpha = y' = a(6bx - 6x^2) = 6a(bx - x^2)$$

Koska $y' \geq 0$ koko liukumäen matkalla ($0 \leq x \leq b$) on vastaavasti liukumäen korkeuserolle

$$2 = y(b) - y(0) = ab^2(3b - 2b) = ab^3. \quad (3)$$

$$a = 2/b^3. \quad (4)$$

Lyhyin liukumäki saavutetaan, kun jyrkkyys on maksimissaan:

$$k' = (y')' = y'' = 6a(b - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 := b/2 \in [0, b]. \quad (5)$$

Koska kyseessä on alapäin aukeava parabeli, jyrkin kohta sijaitsee k :n derivaatan nollakohdassa. Niinpä

$$\tan \alpha = \tan(30^\circ) = 1/\sqrt{3} \geq k = y'(x = x_0) = 6a(b^2/2 - (b/2)^2) = \frac{3}{2}ab^2 \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow ab^2 \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (7)$$

Yhdistetään tämä ehtoon (4)

$$\Leftrightarrow b \leq 3\sqrt{3} = 5.1962\dots \quad (8)$$

joten alarajaksi saadaan: $b \approx 520$ cm.

Arvostelu: Mäen korkeusvaatimuksen pukeminen yhteydeksi +1p, jyrkimmän pisteen selvittämien perusteluineen (5) +2p, jyrkkyyden rajan käsitteleminen (7) +2p, vastaus oikeassa muodossa +1p.

Pelkästä y :n ensimmäisen derivaatan mekaanisesta laskemisesta ei ole hyvitetty. Kaltevuuden maksimin lausekkeesta hyvittäminen sisältää perustelun ääriarvon olemassaolosta (tarkastelu päissä tms).

Tehtävä 6

- (1) Merkitään pyramidin pohjan keskipisteen, egyptologin ja varjon kärjen paikkoja P, E, V .
(2) Etäisyys $|EP| = 345$. Kolmion PEV kulma $\angle V = (260 - 180) - 52 = 28^\circ$, ja $\angle E = 52 - 31 = 21^\circ$, joten sinilauseetta käyttämällä saamme

$$\frac{|EP|}{\sin \angle V} = \frac{|PV|}{\sin \angle E}, \quad \Leftrightarrow \quad |PV| = 345 \frac{\sin(21^\circ)}{\sin(28^\circ)} \approx 263.35\dots$$

- (4) Pyramidin korkeus kolmasosa varjonsa pituudesta, eli $87,7844\dots \approx 88$ m.

Arvostelu: Tehtävässä kulmien $\angle V$ ja $\angle E$ löytäminen antaa (+2p), $|PV|$ ratkaiseminen (+3p) ja korkeuden lausuminen oikein (+1p).