Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia. **Liite:** Kaavakokoelma. **Apuvälineet:** Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin.

A1 Vaaleissa kaikkiaan 39300 äänestäjästä 45 % äänestää varmasti puoluetta A ja 47 % puoluetta B. Loput ovat ns. liikkuvia äänestäjiä, jotka eivät ole vielä päättäneet kantaansa.

(a) Oletetaan, että kaikki äänioikeutetut äänestävät. Kuinka monta liikkuvien äänestäjien ääntä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön, vähintään puolet annetuista äänistä?

(b) Oletetaan, että täsmälleen kolmasosa liikkuvista äänestäjistä jättää äänestämättä. Kuinka monta prosenttia liikkuvien äänestäjien annetuista äänistä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön kaikista annetuista äänistä?

Anna vastaukset prosenttiyksikön tarkkuudella.

A2 Laatikossa on 63 palloa. Palloja on 7 väriä, kunkin värisiä palloja on yhtä monta.

(a) Laatikosta nostetaan umpimähkään kaksi palloa. Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat samanvärisiä?

(b) Oletetaan, että kaksi jo nostettua palloa ovat erivärisiä. Laatikosta nostetaan kaksi palloa lisää. Millä todennäköisyydellä nostetuista neljästä pallosta ainakin kaksi on samanväristä?

Anna vastaus todennäköisyytenä kahden desimaalin tarkkuudella.

A3 Olkoot janan AB päätepisteet xy–koordinaatistossa $(-6, 0)$ ja $(0, a)$ ja janan OC päätepisteet $(0, 0)$ ja $(2, a)$, missä $a \neq 0$.

(a) Mikä on janojen keskipisteiden välinen etäisyys?

(b) Mikä on janojen keskinormaalien leikkauspiste?

A4 Sähkövastuksessa tapahtuva energiahäviö aikavälillä $[a, b]$ on

$$E = R \int_a^b [\ i(t)\ ]^2\ dt,$$

missä $i(t)$ on hetkellä $t \in [a, b]$ vastuksen läpi kulkeva virta ja $R > 0$ on vakio. Olkoon $i(t) = k - e^{-\beta t}$, missä $\beta = 1/8$. Millä parametrin k arvolla saavutetaan energiahäviön E minimi aikavälillä $[0, 2]$?

Anna vastauksena tarkka arvo ja likiarvo kahdella desimaalilla.

A5 Tasokäyrä K koostuu niistä pisteistä (x, y), joille pätee

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^k$$

Määritä käyrän K ja suoran $3y = x - 1$ leikkauspisteet.

Anna vastauksessa sekä koordinaattien tarkat arvot että likiarvot kahdella desimaalilla.

A6 Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja. Operaation $\Box$ avulla luvuista x ja y muodostetaan uusi positiivinen luku $x \Box y$. Operaatio $\Box$ toteuttaa kaikilla $x, y > 0$ seuraavat ehdot

$$\begin{array}{ll} (1) & (xy) \Box y = x(y \Box y), \\ (2) & (x \Box 1) \Box x = x \Box 1, \\ (3) & 1 \Box 1 = 1. \end{array}$$

Määritä $2007 \Box 1$, $2007 \Box 2007$ ja $1 \Box 2007$. Perustele vastauksesi kaikki välivaiheet mahdollisimman tarkkaan.

Anvisningar. Placera varje uppgift *på egen sida*. Markera om svaret forstätter till flere konsept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstruckna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och delfrågorna har inte nödvändigtvis samma vikt i bedömningen. **Bilaga:** Formelsamling. **Instrument:** Skrivinstrument och funktionsräknare.

A1 I valet 45 % av sammanlagt 39300 röstberättigade röstar säkert på partiet A och 47 % på partiet B. De övriga har inte bestämt sig ännu.

(a) Antag att samtliga röstberättigade röstar. Hur många av de ännu obestämda måste då bestämma sig för partiet A för att partiet skulle få majoriteten (över hälften) av alla givna röster?

(b) Antag att exakt en tredjedel av de obestämda låter bli att rösta. Hur många procent av de röster som ges av de ännu obestämda måste partiet A få för att det skall få majoriteten, över hälften av alla givna röster?

Ge svaren med en procentenhets noggrannhet.

A2 I lådan finns 63 bollar. Bollar finns i 7 färger, lika många i varje färg.

(a) Man lyfter av två bollar ur lådan. Vad är sannolikheten att bollarna är av samma färg?

(b) Antag att de redan lyfta två bollarna inte är av samma färg. Man lyfter två bollar till. Vad är sannolikheten att bland de sammanlagt fyra bollarna finns åtminstone två av samma färg?

Ge svaren med två decimalers noggranhet.

A3 Låt ändorna av sträckan AB i xy–koordinatsystemet vara $(-6, 0)$ och $(0, a)$ och ändorna av sträckan OC vara $(0, 0)$ och $(2, a)$, där $a \neq 0$.

(a) Vad är avståndet mellan sträckornas mittpunkter?

(b) Vad är skärningspunkten av sträckornas mittpunktsnormaler?

A4 Energiförlusten i en elektronisk resistor under tidsintervallet $[a, b]$ ges av

$$E = R \int_a^b [\ i(t)\ ]^2\ dt,$$

där $i(t)$ är strömmen genom resistorn vid tidpunkten $t \in [a, b]$. och $R > 0$ är en konstant. Låt $i(t) = k - e^{-\beta t}$, där $\beta = 1/8$. Med vilket parametervärde k fås den minimala energiförlusten E under tidsintervallet $[0, 2]$?

Ange det exakta värdet av svaret samt dess approximation med två decimalers noggrannhet.

A5 Den plana kurvan K består av de punkter (x, y), för vilka

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^k .$$

Bestäm skärningspunkerna hos kurvan K och linjen $3y = x - 1$.

Ange koordinaternas exakta värden och deras approximationer med två decimalers noggrannhet.

A6 Låt x och y vara positiva reella tal. Med hjälp av operationen $\square$ formas från x och y ett nytt positivt reellt tal $x \square y$. Operationen $\square$ satisfierar för alla $x, y > 0$ följande villkor

(1) $(xy) \square y = x(y \square y)$,
(2) $(x \square 1) \square x = x \square 1$,
(3) $1 \square 1 = 1$.

Bestäm $2007 \square 1$, $2007 \square 2007$ och $1 \square 2007$. Motivera varje mellansteg i ditt svar så noggrannt som möjligt.

Tehtävä 1

	A	B	C	D
Merkitään p_A ja p_B puolueiden varmoja ääniosuuksia kaikista n:stä äänestäjästä.	$n = 39300$ $p_A = 45\,\%$, $p_B = 47\,\%$	$n = 28200$ $p_A = 39\,\%$, $p_B = 42\,\%$	$n = 17400$ $p_A = 41\,\%$, $p_B = 46\,\%$	$n = 43200$ $p_A = 38\,\%$, $p_B = 43\,\%$
(a) puolueen A varma äänimäärä on $n_A = p_A \cdot n$. Puolue A tarvitsee puolet annetuista äänistä eli lisä-ääniä	$n_A = 17685$	$n_A = 10998$	$n_A = 7134$	$n_A = 16416$
$d_A = \frac{1}{2}n - n_A.$	$d_A = 1965$	$d_A = 3102$	$d_A = 1566$	$d_A = 5184$
(b) Liikkuvien äänestäjien osuus äänestäjistä on $p_C = 1 - p_A - p_B$. Jos kolmasosa liikkuvista äänestäjistä jättää äänestämättä, yhteensä annetaan $m = (1 - \frac{1}{3}p_C)n$ ääntä, joista puolueen A täytyy saada vähintään puolet. Puolueen A pitää siis saada lisä-ääniä	$p_C = 8\,\%$ $m = 38252$	$p_C = 19\,\%$ $m = 26414$	$p_C = 13\,\%$ $m = 16646$	$p_C = 19\,\%$ $m = 40464$
$d_B = \frac{1}{2}m - n_A.$	$d_B = 1441$	$d_B = 2209$	$d_B = 1189$	$d_B = 3816$
Liikkuvien äänestäjien ääniä annetaan $m_C = (1 - \frac{1}{3})np_C,$	$m_C = 2096$	$m_C = 3572$	$m_C = 1508$	$m_C = 5472$
joten kysytty ääniosuus on $q = \frac{d_B}{m_C}$.	$q = 0{,}6875\ldots \approx 69\%$	$q = 0{,}6184\ldots \approx 62\%$	$q = 0{,}7884\ldots \approx 79\%$	$q = 0{,}6973\ldots \approx 70\%$

Tehtävä 2

	A	B	C	D
(a) Kunkin värisiä palloja on $m = n/k$. Ensimmäinen pallo voi olla mikä tahansa. Laatikossa on näin jäljellä $n-1$ palloa, joista $m-1$ aikaisemmin nostettua väriä, joten kysytty todennäköisyys on	$n = 63$ $k = 7$ $m = 9$	$n = 48$ $k = 8$ $m = 6$	$n = 63$ $k = 9$ $m = 7$	$n = 56$ $k = 7$ $m = 8$
$p = \frac{m-1}{n-1}$.	$p = \frac{6}{62} = \frac{3}{31}$ $= 0.09677419\ldots$ $\approx 0.10 (9.68\%)$	$p = \frac{7}{47} = \frac{7}{47}$ $= 0.14893617\ldots$ $\approx 0.15 (14.89\%)$	$p = \frac{8}{62} = \frac{4}{31}$ $= 0.12903226\ldots$ $\approx 0.13 (12.90\%)$	$p = \frac{6}{55} = \frac{6}{55}$ $= 0.10909091\ldots$ $\approx 0.11 (10.91\%)$
(b) Merkitään kysytyn tapauksen todennäköisyyttä q:lla. Tarkastellaan komplementtitapausta, jossa kaikki nostetut neljä palloa ovat erivärisiä. Oletetaan, että jo kaksi eriväristä palloa on nostettu. Tässä tapauksessa j:n noston jälkeen laatikossa on $n-j$ palloa, joista $j(m-1)$ ovat nostettujen värisiä, joten $1 - q = \prod_{j=2}^{3} \left(1 - \frac{j(m-1)}{n-j}\right)$.	$1 - q =$ $= (1 - \frac{12}{61})(1 - \frac{18}{60})$ $= (1 - \frac{12}{61})(1 - \frac{3}{10})$ $= \frac{49}{61}\,\frac{7}{10} = \frac{343}{610}$ $= 0.562295\ldots$	$1 - q =$ $= (1 - \frac{14}{46})(1 - \frac{21}{45})$ $= (1 - \frac{7}{23})(1 - \frac{7}{15})$ $= \frac{16}{23}\,\frac{8}{15} = \frac{128}{345}$ $= 0.371014\ldots$	$1 - q =$ $= (1 - \frac{16}{61})(1 - \frac{24}{60})$ $= (1 - \frac{16}{61})(1 - \frac{2}{5})$ $= \frac{45}{61}\,\frac{3}{5} = \frac{27}{61}$ $= 0.442623\ldots$	$1 - q =$ $= (1 - \frac{12}{54})(1 - \frac{18}{53})$ $= (1 - \frac{2}{9})(1 - \frac{18}{53})$ $= \frac{7}{9}\,\frac{35}{53} = \frac{245}{477}$ $= 0.513627\ldots$
Kysytty todennäköisyys on q.	$q = \frac{267}{610} = 0.437705\ldots$ $\approx 0.44 (43.77\%)$	$q = \frac{217}{345} = 0.628986\ldots$ $\approx 0.63 (62.90\%)$	$q = \frac{34}{61} = 0.557377\ldots$ $\approx 0.56 (55.74\%)$	$q = \frac{232}{477} = 0.486373\ldots$ $\approx 0.49 (48.64\%)$

Tehtävä 3

Merkitään seuraavassa alaindekseillä 1 janan AB ja indeksillä 2 janan OC suureita.

(a) Janojen keskipisteet $P_i = (x_i, y_i)$

$$\begin{cases} P_1 = (x_1, y_1) = \frac{1}{2}(A+B) = (\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}) = (-3, \frac{a}{2}) \\ P_2 = (x_2, y_2) = \frac{1}{2}(O+C) = (\frac{0+x_C}{2}, \frac{0+y_C}{2}) = (1, \frac{a}{2}) \end{cases}$$

ja niiden etäisyys

$$|P_1 - P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0^2} = 4$$

(b) vaihtoehto 1 Keskinormaali on koostuu pisteistä joille etäisyys janan kummastakin päätepisteestä on sama, toisaalta leikkauspiste $P = (x, y)$ on kummankin janan keskinormaalilla

$$\begin{cases} |P-A| = |P-B| \\ |P-O| = |P-C| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |P-A|^2 = |P-B|^2 \\ |P-O|^2 = |P-C|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)^2 + y^2 = x^2 + (y-a)^2 \\ x^2+y^2 = (x-2)^2 + (y-a)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 36 = -2ay + a^2 \\ 4x - 4 = -2ay + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{a}{2} + \frac{12}{a} \end{cases}.$$

Edellä viimeinen askel saadaan vähentämällä yhtälöt toisistaan ja sijoittamalla takaisin

$$\begin{array}{llll} & 12x + 36 - (4x-4) = 8x + 40 = 0 & \Leftrightarrow & x = -5 \\ \Rightarrow & 4x - 4 = -24 = -2ay + a^2 & \Leftrightarrow & y = \frac{a}{2} + \frac{12}{a} \end{array}.$$

(b) vaihtoehto 2 Muodostetaan janojen keskinormaalit. Janojen AB ja OC (suuntaisten suorien) kulmakertoimet

$$\begin{cases} k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a}{6} \\ k_2 = \frac{y_C}{x_C} = \frac{a}{2} \end{cases}.$$

Keskinormaalit ovat janoja vastaan kohtisuorassa, joten keskinormaalien kulmakertoimet ovat vastaavasti

$$-\frac{1}{k_i}, \quad i = 1, 2.$$

Huomaa että $k_i \neq 0$ koska $a \neq 0$.
Janojen keskinormaalit kulkevat janojen keskipisteiden kautta, joten keskinormaalien yhtälöt voidaan muodostaa ja laskea niiden leikkauspiste

$$\begin{cases} (y - y_1) = \frac{-1}{k_1}(x - x_1) \\ (y - y_2) = \frac{-1}{k_2}(x - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{a}{2} = -\frac{6}{a}(x+3) \\ y - \frac{a}{2} = -\frac{2}{a}(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{a}{2} + \frac{12}{a} \end{cases}$$

jossa viimeinen askel saadaan vähentämällä yhtälöt toisistaan ja sijoittamalla takaisin

$$\begin{array}{llllll} & -\frac{6}{a}(x+3) = -\frac{2}{a}(x-1) & \Leftrightarrow & 3(x+3) = (x-1) & \Leftrightarrow & x = -5 \\ \Rightarrow & y - \frac{a}{2} = -\frac{2}{a}(x-1) = \frac{12}{a} & \Leftrightarrow & y = \frac{a}{2} + \frac{12}{a}. & & \end{array}$$

Tehtävä 4

Tehohäviö saadaan sijoittamalla

$$E = R\int_0^2 (k - e^{-\beta t})^2\, dt = R\int_0^2 k^2 - 2ke^{-\beta t} + e^{-2\beta t}\, dt$$

$$= R\left(2k^2 + \frac{2k}{\beta}(e^{-2\beta} - 1) - \frac{1}{2\beta}(e^{-4\beta} - 1)\right)$$

Jos $|k|$ kasvaa rajatta, tehohäviö E kasvaa rajatta (E on ylöspäin aukeava paraabeli k:n suhteen, $R > 0$). Minimi saavutetaan siis derivaatan nollakohdassa:

$$\frac{dE}{dk} = 4kR + \frac{2}{\beta}(e^{-2\beta} - 1)R = 0, \quad k = (1 - e^{-2\beta})/(2\beta)$$

Tehtävässä voidaan myös derivoida (k:n suhteen) integrandi ennen integrointia (t:n suhteen).

A

$\beta = 1/8$

$\int = k^2 t + 16ke^{-t/4} - 4e^{-2t/4}$

$\frac{E}{R} = 2k^2 + 16k(e^{-t/4} - 1) - 4(e^{-2/4} - 1)$

$\approx 2k^2 - 1.3272k - 0.5902$

$\frac{1}{R}\frac{dE}{dk} = 4k + 16(e^{-1/4} - 1)$

$k = 4(1 - e^{-1/4}) = 0.884797\ldots \approx 0.88$

B

$\beta = 1/14$

$\int = k^2 t + 28ke^{-t/7} - 7e^{-2t/7}$

$\frac{E}{R} = 2k^2 + 28k(e^{-t/7} - 1) - 7(e^{-2/7} - 1)$

$\approx 2k^2 - 0.7987k - 0.3728$

$\frac{1}{R}\frac{dE}{dk} = 4k + 28(e^{-1/7} - 1)$

$k = 7(1 - e^{-1/7}) = 0.931855\ldots \approx 0.93$

C

$\beta = 1/12$

$\int = k^2 t + 24ke^{-t/6} - 6e^{-2t/6}$

$\frac{E}{R} = 2k^2 + 24k(e^{-t/6} - 1) - 6(e^{-2/6} - 1)$

$\approx 2k^2 - 0.9211k - 0.4252$

$\frac{1}{R}\frac{dE}{dk} = 4k + 24(e^{-1/6} - 1)$

$k = 6(1 - e^{-1/6}) = 0.921110\ldots \approx 0.92$

D

$\beta = 1/6$

$\int = k^2 t + 12ke^{-t/3} - 3e^{-2t/3}$

$\frac{E}{R} = 2k^2 + 12k(e^{-t/3} - 1) - 3(e^{-2/3} - 1)$

$\approx 2k^2 - 1.7008k - 0.7299$

$\frac{1}{R}\frac{dE}{dk} = 4k + 12(e^{-1/3} - 1)$

$k = 3(1 - e^{-1/3}) = 0.850406\ldots \approx 0.85$

Tehtävä 5

Käyrän määrielmässä oikea puoli on geometrinen sarja. Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ suppenee, jos ja vain jos $|q| < 1$, jolloin sarjan summa on $(1-q)^{-1}$. Käyrä K muodostuu pisteistä, joille määritelmän oikean puolen *sarja suppenee*. Summan termit ovat määriteltyjä jos $2x - 1 \neq 0$. Joten ehdoksi saadaan

$$|q| < 1, \quad q := \frac{x+1}{2x-1}, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Käyrä saa muodon

$$y = (1-q)^{-1} = (1 - \frac{x+1}{2x-1})^{-1} = \frac{2x-1}{x-2}, \quad \text{kun} \quad x \notin \{2; \frac{1}{2}\} \quad \text{ja} \quad |q| < 1.$$

Lasketaan nyt formaalisti tätä muotoa käyttäen käyrien leikkauspisteiden x-koordinaatti

$$x - 1 = 3y = 3\frac{2x-1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9x + 5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{9^2 - 4*5}) = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{2} = \begin{cases} x_+ := 8.40512\ldots \\ x_- := 0.59488\ldots \end{cases}. \tag{1}$$

Tarkastellaan sarjan suppenemista potentiaalisissa leikkauspisteissä

$$|q| = \left|\frac{x+1}{2x-1}\right| = \begin{cases} 0,59\ldots < 1 & , x = x_+ \\ 8,4\ldots \not< 1 & , x = x_- \\ 1 \not< 1 & , x = 2 \end{cases}$$

joten sarja suppenee vain kun $x = x_+$, jolloin

$$y = y_+ = \frac{1}{3}(x_+ - 1) = \frac{7+\sqrt{61}}{6} = 2,46837\ldots$$

Kysytty leikkauspiste on

$$(x_+, y_+) = (\frac{9+\sqrt{61}}{2}; \frac{7+\sqrt{61}}{6}) \approx (8,41;\ 2,47).$$

Suppenemisalueen lasku erikseen Tehtävässä voidaan myös tarkastella sarjan suppenemisalue ennen leikkauspisteiden laskemista. Sarja suppenee kun

$$\begin{aligned} & |q| = \left|\tfrac{1+x}{1-2x}\right| < 1, \quad x \neq \tfrac{1}{2} & & \\ \Leftrightarrow\ & |1+x| < |1-2x| & \Leftrightarrow\ & |1+x|^2 < |1-2x|^2 \\ \Leftrightarrow\ & 1 + 2x + x^2 < 1 - 4x + 4x^2 & \Leftrightarrow\ & 0 < 3x(x-2) \\ \Leftrightarrow\ & x < 0 \quad \vee \quad 2 < x & \Leftrightarrow\ & x \notin [0,2] \end{aligned}$$

jolloin K saa muodon $3y = \frac{1-2x}{x}$ ja yhtälössä (1) vain $x = x_+$ kelpaa sillä $x_+, 1 \in [0,2]$.

Tehtävä 6

Kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x, y

$$\begin{array}{ll} (1) & (xy) \square y = x(y \square y) \\ (2) & (x \square 1) \square x = x \square 1 \\ (3) & 1 \square 1 = 1. \end{array}$$

joten

$$(4) \qquad x \square 1 = (x \cdot 1) \square 1 \overset{(1)}{=} x(1 \square 1) \overset{(3)}{=} x,$$

edelleen

$$(5) \qquad x \square x \overset{(4)}{=} (x \square 1) \square x \overset{(2)}{=} x \square 1 \overset{(4)}{=} x.$$

Itse asiassa osoittautuu, että operaatio $\square$ yksinkertaisesti palauttaa vasemman argumenttinsa:

$$(6) \qquad y \square x = (\frac{y}{x}x) \square x \overset{(1)}{=} \frac{y}{x}(x \square x) \overset{(5)}{=} \frac{y}{x}x = y$$

Erityisesti siis (valitsemalla $x = 2007$ ja $y = 1$) saadaan

$$2007 \square 1 \overset{(4)}{=} 2007, \qquad 2007 \square 2007 \overset{(5)}{=} 2007, \qquad 1 \square 2007 \overset{(6)}{=} 1.$$