Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen.* Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja funktiolaskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 Tarkastellaan suorakulmiota.

a) Suorakulmion pidempiä sivuja pidennetään 11% ja lyhyempiä sivuja vastaavasti lyhennetään 11%. Miten suorakulmion ala muuttuu?

b) Suorakulmion lyhyempiä sivuja pidennetään p%. Kuinka paljon pidempiä sivuja on lyhennettävä, jotta pinta-ala pysyisi ennallaan?

A2 Millä vakion a arvoilla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} ax + y = 2 - a \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

ei ole yhtään ratkaisua?

A3 Sata metriä pitkä köysi katkaistaan kahteen osaan. Toisesta osasta muodostetaan ympyrän ja toisesta neliön piiri. Kuvioiden pinta-alojen halutaan olevan samat. Miten naru on katkaistava?

A4 Suora $y = 2$ ja paraabeli $y = x^2$ rajaavat puolitasossa $x \geq 0$ äärellisen alueen. Millä a:n arvoilla suora $y = ax$ jakaa pinta-alan kahteen osaan osien pinta-alojen suhteessa 1:3?

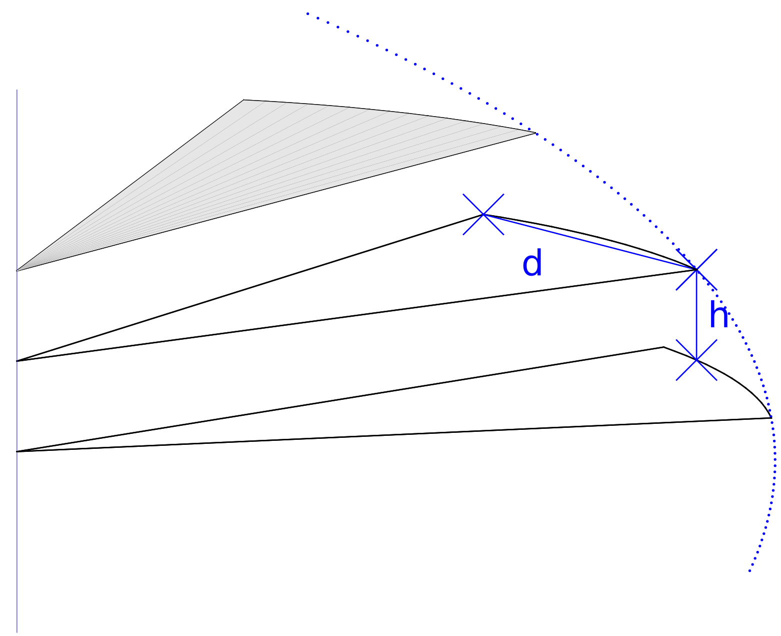
A5 Suoran pyramidin muotoisen teltan pohja on neliö. Seinien yhteispinta-ala on $9\,\mathrm{m}^2$. Mikä on pohjan ala A, kun teltan tilavuus maksimoidaan?

Anna vastauksena tarkka arvo ja likiarvo kahdella desimaalilla.

A6 Halutaan selvittää korkean kierreportaikon vaatima lattiatila.

Päältä katsoen portaikon askelmat ovat ympyräsektorin muotoisia, jossa sektorin jänne on $d = 50\,\mathrm{cm}$ (kuvassa). Askelmasektorien kärjet ovat portaikon keskellä. Askelman nousu portaalta seuraavalle on $h = 13\,\mathrm{cm}$. Askelman pinta-alasta 20% on seuraavan askelman alla. Portaissa on oltava kaikkialla vähintään 260 cm tilaa korkeussuunnassa. Askelman paksuutta ei tarvitse ottaa huomioon.

Kuinka pieni voi portaikon halkaisija olla?



Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och funktionsräknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 Vi studerar en rektangel.

a) Rektangelns längre sidor förlängs med 11% och dess kortare sidor på motsvarande sätt förkortas med 11%. Hur ändras rektangelns area?

b) Rektangelns kortare sidor förlängs med p%. Hur mycket måste de längre sidorna förkortas, för att arean skal förbli oförändrad?

A2 För vilka värden på konstanten a saknar ekvationsystemet

$$\begin{cases} ax + y = 2 - a \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

lösning?

A3 Ett hundra meter långt rep kapas i två delar. Den ena delen formas till omkretsen hos en cirkel och den andra delen till omkretsen hos en kvadrat. Man vill att figurerna skall ha samma area. Hur borde man kapa repet?

A4 Linjen $y = 2$ och parabeln $y = x^2$ begränsar i halvplanet $x \geq 0$ ett ändligt område. För vilka värden på a kommer linjen $y = ax$ att dela arean i två delar med förhållandet 1:3?

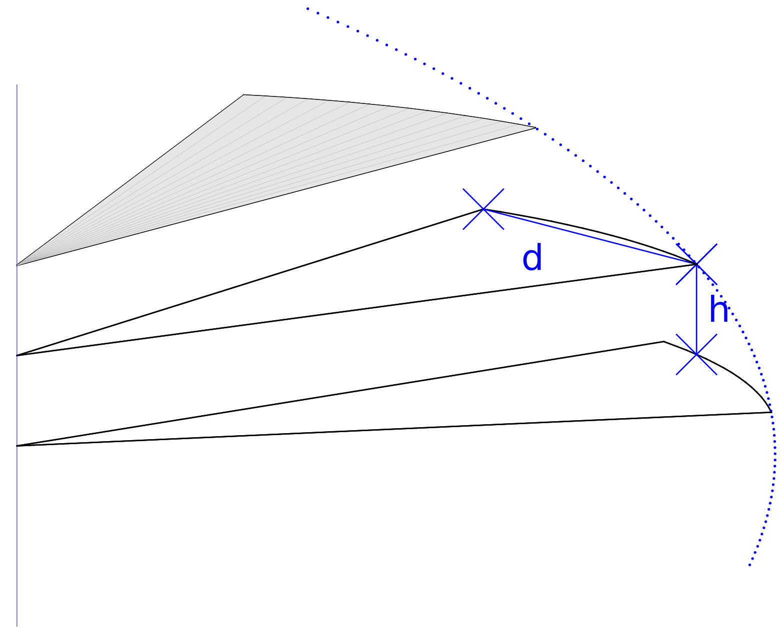
A5 Ett tält i form av en rak pyramid har en kvadratisk botten. Väggarna har sammalagda arean 9 m^2. Vad är tältets bottenarea A, då dess volym är maximal?

Ge exakta värdet samt värdet avgrundat till två decimaler.

A6 Man vill bestämma hur stor golvarea en hög spiraltrappa kräver.

Uppifrån sett har trappstegen formen av cirkelsektorer, där segmentet $d = 50$ cm (se figuren). Stegsektorernas spetsar är i trappans mitt. Steghöjden från ett trappsteg till nästa är $h = 13$ cm. Av trappstegets yta är 20% under nästa trappsteg. I trappan måste det finnas minst 260 cm utrymme i höjdled överallt. Trappans tjocklek behöver inte beaktas.

Hur liten kan trappans diameter vara?



Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps*. Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted.

Allowed instruments: Writing instruments, non–programmable calculator; no dictionaries allowed. **Attachment:** Table of formulae.

A1 Consider a rectangle.

a) The longer edges of the rectangle are extended 11% and the shorter edges are respectively shortened 11%. How does the area of the rectagle change?

b) The shorter edges are extended p%. How much should the longer edges be shortened, in order to keep the area unchanged?

A2 For which values of the constant a does the set of equations

$$\begin{cases} ax + y = 2 - a \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

have no solution?

A3 A rope, hundred meter long, is cut into two. One part forms the circumference of a circle and the other part the circumference of a square. The shapes should have equal area. How should one cut the rope?

A4 Line $y = 2$ and parabola $y = x^2$ bound a finite area in the half plane $x \geq 0$. For which values of a does the line $y = ax$ divide the area in the ratio 1:3?

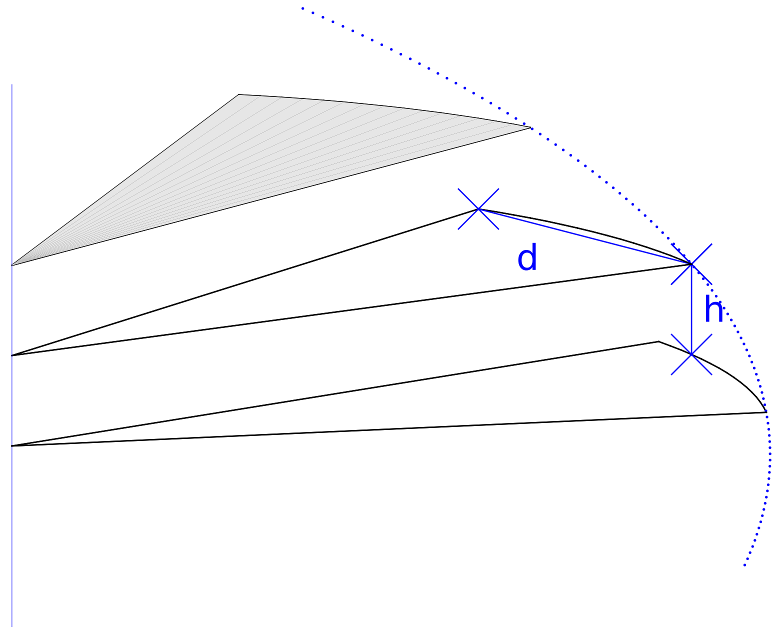
A5 A tent has the form of a right pyramid with square base. The walls have total area 9 m^2. What is the area A of the base, when the tent's volume is maximized?

Give the exact answer and its approximation to two desimals of accuracy.

A6 One wants to determine the floor space needed for a high spiral staircase.

From above the steps of the staircase have the form of a sector of a circle, where the chord of the sector is $d = 50$ cm (see the figure). The vertex of the sector is at the center of the staircase. The ascent from a step to the next one is $h = 13$ cm. Some 20% of the area of a step lies under the next one. Everywhere at the stairs there has to be at least 260 cm vertical free space. The thickness of the step can be ignored.

How small can the diameter of the staircase be?



Tehtävä 1

Merkitään pinta-alaa ennen operaatiota $A_0 = ab$ ja A_1 jälkeen.

(a) $A_1/A_0 = (1+\frac{p}{100})(1-\frac{p}{100}) = 1-\frac{p^2}{100^2} = 1-0,0121$. Pinta-ala pienee siis $1,21\%$.

(b) Nyt vaaditaan

$$1 = A_1/A_0 = (1+\frac{p}{100})(1-\frac{q}{100}) = 1+\frac{p}{100}-\frac{q}{100}-\frac{pq}{100^2}$$

$$0 = 100(p-q)-pq \Leftrightarrow (100+p)q = 100p \Leftrightarrow q = \frac{100p}{100+p}.$$

Pinta-alan kasvu on $q\% = \frac{100p}{100+p}\%$.

<u>Vaihtoehtoisesti</u> voidaan merkitä $\tilde{p} = 1+\frac{p}{100}$ ja $\tilde{q} = 1+\frac{q}{100}$, jolloin $1 = A_1/A_0 = \tilde{p}\tilde{q} \Leftrightarrow \tilde{q} = 1/\tilde{p} \Leftrightarrow q = 100(1-1/\tilde{p}) = \cdots = \frac{100p}{100+p}$.

<u>Vaihtoehtoisesti</u> vastaus voidaan antaa esimerkiksi muodossa “pinta-ala kasvaa $\frac{100}{100+p}$ -kertaiseksi”.

Arvostelu: Osatehtävät arvostellaan a) 2p, b) 4p.

On huomattava, että tehtävässä kiinnitetään $p\%$, eli jos tarkoitetaan osuutta $30\% = 0,30$ on $p = 30$ ja siis $p \neq 0,30$. Useassa vastauksessa kirjoitetaan $1+p$ kun tarkoitetaan $1+\frac{p}{100}$. Mikäli käyttö on johdonmukaista, voi b-osasta saada 2p.

Tehtävä 2

Yhtälöt ovat suoria

$$\begin{cases} ax + y = 2 - a \\ x + ay = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ax + 2 - a \\ y = -\frac{1}{a}(x-1) \end{cases} \qquad (a \neq 0)$$

Suorilla ei ole yhteisiä leikkauspisteitä, jos niiden kulmakertoimet ovat samat, $-a = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$, mutta ne eivät yhdy. Tutkitaan kaikki erikoistapaukset:

$a = 1$	$a = 0$	$a = -1$
$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Arvolla $a = -1$ ratkaisuja ei ole.

<u>Vaihtoehtoisesti</u> voimme ratkaista yhtälöistä : (yhteenlaskien)

$$\begin{cases} ax + y = 2 - a \quad (\cdot a \neq 0) \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x = 2a - a^2 - 1 \quad (\cdot(a^2 - 1) \neq 0) \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{(1-a)^2}{1-a^2} \\ y = \frac{1}{a}(1 - x) = \frac{2a}{a(1-a^2)} \end{cases}$$

Nyt tutkitaan tapaukset $a(1 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1, 0, 1\}$ kuten edellä.

Arvostelu: Arvostelussa kulmakertoimien ja suorien yhtäsuuruuden ja ratkaisujen lukumäärän yhteyden löytäminen on 2p arvoista.

Saadut kandidaatit vakion arvoiksi on tarkistettava alkuperäisistä yhtälöistä. Ilman tarkistusta arvostelumaksimi on lähtökohtaisesti tehtävästä 4p.

Vaihtoehtoisessa suorituksessa joko $x = x(a)$ tai $y = y(a)$ lausekkeiden löytäminen on 2p arvoista. Nämä antavat *kandidaatit* $a = \pm 1$ pisteille jossa ei ole yksikäsitteistä ratkaisua; ilman em tarkistusta tehtävän arvostelu on enintään 4p. Myös erityisarvo $a = 0$ on tarkistettava, mikäli sillä on jaettu tai kerrottu yhtälö.

Tapauksen $a = -1$ käsittely ilman muuta perustelua antaa ollessaan oikein 2p.

Tehtävä 3

Olkoon ympyrän säde r ja neliön sivu a, ja narun pituus $L = 100$.

$$\begin{aligned} L &= p_Y + p_N = 2\pi r + 4a && (1)\\ a^2 &= \pi r^2 && (2)\\ \Rightarrow \quad a &= r\sqrt{\pi} && (3) \end{aligned}$$

Esitetään kolme yleisesti käytettyä vastaustapaa:

Tapa 1 Yhtälö (3) sijoitetaan yhtälöön (2):

$$L = (2\sqrt{\pi} + 4)a; \quad a = \frac{L}{2\sqrt{\pi}+4}; \quad p_Y = 4a = \frac{2}{2+\sqrt{\pi}}L \approx 46,9841$$

jolloin $p_N = L - p_Y = \frac{\sqrt{\pi}}{2+\sqrt{\pi}}L \approx 53,015890.$

Tapa 2 Yhtälöstä (3) saadaan $\frac{a}{r} = \sqrt{\pi}$ ja edelleen

$$\frac{p_N}{p_Y} = \frac{4a}{2\pi r} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Neliön osuus narusta on näin

$$s = \frac{p_N}{p_N + p_Y} = \frac{p_N/p_Y}{p_N/p_Y + 1} = \frac{2}{2+\sqrt{\pi}}$$

ja pituudet siis $p_N = sL$ ja $p_Y = (1-s)L$.

Tapa 3 Yhtälöstä (1) ratkaistaan $r(a) = \frac{L-4a}{2\pi}$ (tai $a(r)$) ja sijoitetaan se yhtälöön (2). Tämä johtaa binomin neliöönkorotukseen:

$$\pi r^2 = a^2; \quad L^2 - 8La + 16a^2 = 4\pi a^2; \quad L^2 - 8La + 4(4-\pi)a^2 = 0$$

$$a = \frac{8L \pm \sqrt{(8L)^2 - 16(4-\pi)L^2}}{8(4-\pi)} = \frac{L(2 \pm \sqrt{\pi})}{2(4-\pi)} = \frac{L}{2(2 \mp \sqrt{\pi})}$$

Kahdesta ratkaisuista ylempi ei ole määrittelyalueella ($p_N = 4a = \frac{2}{2-\sqrt{\pi}}L > L$) joten

$$p_N = 4a = \frac{2}{2+\sqrt{\pi}}L.$$

Arvostelu: Yhteiset arvosteluperusteet kaikilla tavoille ovat: Yhtälöryhmä (1) ja (2) antaa 2p. Yhtälöryhmä (1) ja (3) antaa 3p. Toisen muuttujan eliminointi antaa 1p lisäpisteen.

Loput pisteet tulevat mekanisista laskuista, joiden määrä vaihtelee tavoittain.

Virheet pinta-alojen tai piirien lausekkeissa rajaavat tehtävän pisteet 4 pisteeseen. Perustelematon likiarvojen käyttö vähentää yhden pisteen.

Tehtävä 4

Suoran $y = 2$ leikkauspiste paraabelin $y = x^2$ $(x \geq 0)$ kanssa on $Q = (x_P, y_P) = (\sqrt{2}, 2)$ ja y-akelin kanssa $P = (0, 2)$. Merkitään koko alueen pinta-alaa A.

$$A = \int_0^{x_p} 2 - x^2 \, dx = 2x_p - \frac{1}{3}x_P^3 = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa suora $y = ax$ leikkaa suoran $y = 2$ janalla PQ: leikkauspiste $(x_a, y_a) = (2/a, 2)$, tällöin $0 \leq x_a \leq x_P$ eli on oltava $a \geq \sqrt{2}$. Suoran yläpuolelle jää nyt suorakulmainen kolmio OPQ, jonka pinta-ala

$$A_1 = \frac{1}{2}y_a x_a = 2/a$$

Tutkitaan kumpikin mahdollinen tapaus $A_1 : A = 1 : 4$ ja $A_1 : A = 3 : 4$:

$$\frac{1}{4}A = A_1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 2/a \Leftrightarrow a = 3\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$$

$$\frac{3}{4}A = A_1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\frac{4}{3}\sqrt{2} = \sqrt{2} = 2/a \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \geq \sqrt{2}$$

Koska kummatkin leikkauspisteet ovat janalla PQ, suoran $y = ax$ leikkausta paraabelin kaaren OQ kanssa ei tarvitse enää tarkastella.

Arvostelu: Tehtävässä pinta-alojen A ja A_1 laskeminen oikein antaa yhteensä 3p. On näytettävä myös, että leikkauspiste on välillä PQ, (1p).

Mikäli mahdollisia tapoja jakaa alue osiin löydetään vain yksi, annetaan tehtävästä enintään 4p.

Väärin muodostettu suhde (esim. $A_1 : A = 1 : 3$) vähentää 2p. Tehtävä tulee suorittaa tarkoilla arvoilla.

Tehtävä 5

Merkitään sivujen alaa $C = 9$, tilavuus $V = \frac{1}{3}Ah$, jossa h on pyramidin korkeus ja A tuntematon pohjan ala. Huomaa, että $0 \leq A \leq C$. Sivut ovat tasasivuisia kolmioita, kanta s, korkeus d.

$$A = s^2$$

$$C = 4\frac{1}{2}ds = 2ds \Leftrightarrow d = \frac{C}{2s}$$

$$h^2 = d^2 - (\frac{s}{2})^2 = \frac{C^2}{4s^2} - \frac{A}{4} = \frac{C^2 - A^2}{4A}$$

Tästä

$$V(A) = \frac{1}{6}A\sqrt{\frac{C^2 - A^2}{A}} = \frac{1}{6}\sqrt{AC^2 - A^3}$$

Maksiarvo saavutetaan juurrettavan maksimissa[1]:

$$\frac{d}{dA}(AC^2 - A^3) = C^2 - 3A^2 = 0 \Leftrightarrow A = \sqrt{C^2/3} = C/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Maksimi saavutetaan derivaatan nollakohdassa, koska määrittelyalueen, $A \in [0, C]$, reunalla $V = 0$.

Vaihtoehtoisesti lausekkeet voidaan toki ilmaista myös esimerkiksi s avulla: $V(s) = \frac{1}{12}\sqrt{s^2C^2 - s^6}$ – laskut ovat samankaltaiset.

Arvostelu: Arvostelussa $V(A)$ lauseke (tai vastaava yhden muuttujan lauseke) antaan 3p; derivointi ja määrittelyalueen tarkastelu ja vastauksen muotoilu loput.

Alkuosassa lausekeet $d(A)$ tai $d(s)$, $h(A)$ tai $h(s)$ antavat pisteen, mikäli vastauksesta käy ilmi käsitteiden määrittely ja lausekkeiden käyttö.

Todettakoon, että tilavuuden maksimi todellakin saavutetaan, kun sivukolmiot ovat tasasivuisia, sillä sivun pituuden neliö on $d^2 + (s/2)^2 = \frac{C^2}{4s^2} + \frac{s^2}{4} = \frac{3A^2}{4s^2} + \frac{s^2}{4} = \frac{3s^2}{4} + \frac{s^2}{4} = s^2$, mutta tämä ei ole triviaali fakta, sitä ei voi ottaa lähtökohdaksi.

[1] Ääriarvon etsimisen kannalta on oleellisesti helpompi tarkastella juurrettavaa tai lauseketta V^2 kuin derivoida V:tä.

Tehtävä 6

Merkitään yhden portaan keskuskulmaa α.

Vaadittu nousu, 260 cm, vastaa tarkalleen $n = 260/h = 20$ porrasta kierroksella. Kierroksen viimeisen portaan takareunan on oltava ensimmäisen portaan etureunan kohdalla, jotta vapaa korkeus olisi vaadittu kaikissa kohdissa. Tästä saamme (80%=4/5)

$$360^\circ = \frac{4}{5}n\alpha + \frac{1}{5}\alpha, \tag{4}$$

josta ratkaisemalla

$$\alpha = \frac{5}{4n+1}360^\circ = 200/9.$$

Tarkastelemalla puolikasta porrasta (joka muodostaa suorakulmaisen kolmion) saamme säteelle r,

$$r\sin(\alpha/2) = d/2.$$

Pienimmäksi halkaisijaksi tulee

$$2r = \frac{d}{\sin(\alpha/2)} \approx 259,45417 \approx 260 \text{ cm}.$$

Arvostelu: Portaiden lukumäärä n: 1p; kulman α arvo 2p.

Mikäli (4) sijaan asetetaan $360 = \frac{4}{5}n\alpha$, annetaan tehtävästä enintään 4p.

Mikäli käytetään arvoa $n = 360/n$ annetaan tehtävästä enintään 3p.

Vastaus on pyöristettävä ylöspäin (kyseessä on alaraja).