Ohjeita. Sijoita jokainen tehtävä *omalle sivulleen*. Merkitse, jos tehtävä jatkuu usealle konseptille. Laadi ratkaisut selkeästi *välivaiheineen*, ja perustele ratkaisun vaiheet. Tarvittaessa kirjoita ratkaisu uudelleen puhtaaksi. *Merkitse hylkäämäsi ratkaisu tai hylkäämäsi ratkaisun osa yliviivaamalla* se, sillä saman tehtävän useista ratkaisuista huonoin otetaan mukaan arvosteluun. Huomaa, että kukin tehtävä arvostellaan kokonaisuutena, eivätkä alakohdat välttämättä ole pisteytyksessä samanarvoisia.

Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja laskin. **Liite:** Kaavakokoelma.

A1 Taloyhtiössä on 210 asukasta. Taloyhtiö perii vesimaksua 15 e/henkilö/kk. Kaupunki perii taloyhtiöltä vesimaksua kokonaiskulutuksen mukaan 3,17 e/m^3

Taloyhtiön toteutunut kokonaisvedenkulutus on asukasta kohden 155 litraa vuorokaudessa, mihin sisältyy hukkaan valuvia vuotoja yhtiötä kohden 1500 m^3 vuodessa.

Oletamme, että vuodessa on 365 vuorokautta.

(a) Kuinka monta litraa vettä taloyhtiössä valuu hukkaan minuutissa?
(b) Vuodot tukitaan. Montako prosenttia vesimaksua voitaisiin laskea tai tulee korottaa, jotta vesimaksu tällöin kattaisi taloyhtiön vuotuiset vesikulut?

Anna vastaukset kolmen numeron tarkkuudella.

A2 Pallon B säde on 9 metriä. Pallon sisään sijoitetaan vierekkäin kaksi palloa B_1 ja B_2 siten, että kaikki kolme palloa sivuavat toisiaan. Pallojen B_1 ja B_2 keskipisteet ovat samalla pallon B halkaisijalla. Määrää pallojen B_1 ja B_2 säteet r_1 ja r_2 siten, että pallojen B_1 ja B_2 tilavuuksien suhde on $1:8$.

A3 Arkkitehtitoimiston kahvitauko lähestyy, ja harjoittelija keittää kuudelle kollegalle Aallolle, Borgille, Caloniukselle, Dahlströmille, Engelille ja Finnilälle kahvia. Aalto ja Engel juovat kahvinsa sokerilla, muut ilman sokeria. Harjoittelija laittaa kahteen kahviin sokeria, mutta jakaa kupit epähuomiossa satunnaisesti.

(a) Millä todennäköisyydellä Aalto saa haluamansa juoman?
(b) Millä todennäköisyydellä sekä Aalto että Engel saavat haluamansa juoman?
(c) Millä todennäköisyydellä kaikki kollegat saavat haluamansa juoman?

A4 Tarzan, apinain kuningas, heilauttaa itsensä liaanilla ilmaan aikeenaan sukeltaa jokeen. Irrottaessaan otteensa liaanista Tarzan siirtyy alaspäin aukeavan paraabelin muotoiselle lentoradalle.

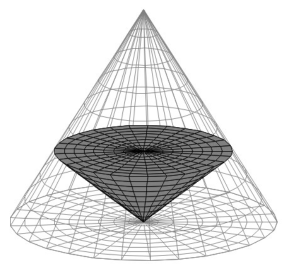
Asetetaan xy-koordinaatisto lentoradan tasoon, x-akseli joen pinnalle ja origo suoraan irrotuskohdan alle.

Irrotushetkellä Tarzan on viisi metriä joen pinnan yläpuolella ja lentoradan tangentin kulmakerroin on 0. Tarzan päätyy jokeen 9 m päässä origosta.

Määrää paraabelin yhtälö.

A5 Kolmion kulmien astelukujen suhteet ovat 3:5:7 ja pienimmän kulman vastaisen sivun pituus on 1. Laske kolmion kulmat ja pinta-ala.

A6 Suoran ympyräkartion K pohjaympyrän säde on 7 cm ja korkeus 14 cm. Kartion K sisään asetetaan toinen suora ympyräkartio L (pohjaympyrän säde r, korkeus h) siten, että L:n kärki on K:n pohjan keskipisteessä ja pohjaympyrä K:n vaipalla. Mikä on kartion L suurin mahdollinen tilavuus?



Anvisningar. Placera varje uppgift *på en egen sida*. Markera om svaret fortsätter på flera koncept. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier* och motivera lösningens samtliga steg. Renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar och förkastade delar av en lösning skall överstrykas.* Om icke-överstrukna lösningar föreligger, bedöms den sämsta av dessa. Notera, att varje fråga bedöms som en helhet och att delfrågorna inte nödvändigtvis har samma vikt i bedömningen.

Hjälpmedel: Skrivredskap och räknare. **Bilaga:** Formelsamling.

A1 Ett fastighetsbolag har 210 boende. Bolaget tar ut en vattenavgift på 15 e/person/månad. Staden tar ut en vattenavgift av bolagets, beroende på vattenförbrukning, 3,17 e/m^3.

Totala vattenförbrukningen i bolaget är 155 liter per dygn per boende, i vilken ingår läckage för hela bolaget 1500 m^3 per år.

Låt oss anta att året har 365 dygn.

(a) Hur många liter vatten läcker ut per minut i bolaget?

(b) Läckaget täpps till. Med hur många procent kan vattenavgiften sänkas eller måste höjas för att vattenavgiften skall täcka bolagets årliga utgifter?

Ge svaren med tre siffrors noggrannhet.

A2 Bollen B har radien 9 meter. Inuti bollen placeras två bollar B_1 och B_2 bredvid varandra så, att alla tre bollarna tangerar varandra. Mittpunkterna hos bollarna B_1 och B_2 finns på samma diameter hos bollen B. Bestäm radierna r_1 och r_2 hos bollarna B_1 respektive B_2 så, att förhållandet mellan volymerna hos bollarna B_1 och B_2 är $1:8$.

A3 Arkitektskontorets kaffepaus närmar sig och praktikanten kokar kaffe för sex kolleger Aalto, Borg, Calonius, Dahlström, Engel and Finnilä. Aalto och Engel dricker sitt kaffe med socker, de övriga utan socker. Praktikanten lägger socker i två av kopparna men delar av misstag ut kopparna slumpmässigt.

(a) Med vilken sannolikhet får Aalto sin önskade dryck?

(b) Med vilken sannolikhet får både Aalto och Engel sina önskade drycker?

(c) Med vilken sannolikhet får alla kollegerna sina önskade drycker?

A4 Tarzan, apornas konung, svingar sig igenom luften i en lian med avsikten att dyka i floden. Då han släpper taget om lianen, fortsätter Tarzan längs en flygbana i form av en parabel, som öppnar sig nedåt.

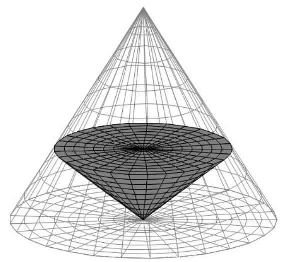
Placera xy-koordinaterna i planet för flygbanan med x-axeln längs flodytan och origo rakt under punkten, där Tarzan släpper lianen.

Då Tarzan släpper lianen, befinner han sig fem meter ovanför flodytan och flygbanans tangent har lutningen 0 där. Tarzan hamnar i floden 9 m från origo.

Bestäm parabelns ekvation.

A5 Förhållandet mellan vinklarnas gradtal i en triangel är 3:5:7 och den minsta vinkelns motstående sida har längden 1. Beräkna triangelns vinklar och area.

A6 Bottencirkelns radie hos en rät cirkulär kon K är 7 cm och höjden är 14 cm. Inuti konen K placeras en annan rät cirkulär kon L (med bottencirkelns radie r och med höjden h), där L har sin spets i mittpunkten hos K:s bottencirkel och dess bottencirkel är på K:s mantelyta. Vad är största möjliga volymen hos konen L?



Instructions. Reserve *a separate page* for each problem. Indicate if the answer continues on a separate sheet. Give your solutions in a clear form *including intermediate steps* and justifying every step of the solution. Rewrite a clean copy of the solution if needed. *Cross out discarded solutions and any discarded parts of the solutions.* In the case of several solutions for the same problem, only the weakest one will be credited. Note that subsections of a question are not necessarily equally weighted and each solution is graded as an entity.

Allowed instruments: Writing instruments, calculator; no dictionaries are allowed.
Attachment: Table of formulae.

A1 A building has 210 inhabitants. The associated housing company charges 15 e/person/month for water. The city charges the company 3,17 e/m^3 according to the total consumption of water.

The realized consumption of water has been per inhabitant 155 litre per day, which includes leaks totaling for the entire building to 1500 m^3 per year.

We assume the year has 365 days.

(a) How many litres of water are wasted in the building through the leaks in a minute?

(b) The leaks are stopped. What precentage could the company lower, or should raise, the water charge in order to cover the yearly costs?

Give the answers to the accuracy of three significant digits.

A2 The radius of ball B is 9 meters. Inside the ball one places two additional balls B_1 and B_2, so that they all three touch each other. The center points of the balls B_1 and B_2 are on the same diameter of ball B. Determine the radii r_1 and r_2 of B_1 and B_2 , so that balls B_1 and B_2 have a ratio of volumes $1:8$.

A3 The coffee break at an architects' office is approaching. A trainee makes coffee for six colleagues Aalto, Borg, Calonius, Dahlström, Engel and Finnilä. Aalto and Engel prefer their coffees with sugar, others without. The trainee adds sugar to two cups, but then accidentally mixes the cups up into a random order.

(a) With what probability will Aalto get a drink of his liking?

(b) With what probability will both Aalto and Engel get a drink of their liking?

(c) With what probability will all the colleagues get drinks of their liking?

A4 Tarzan, king of the apes, swings himself with a liana into the air aiming to dive into a river. Removing his grip on the liana he continues on a trajectory in the form of a downward opening parabola.

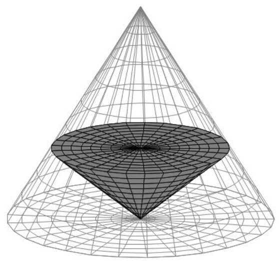
One sets the xy-coordinates on the plane of the trajectory, the x-axis on the level of the river and the origin directly under the point of the detachment from the liana.

At the moment Tarzan detaches himself from the liana, he finds himself five meters above the water surface and his trajectory has a slope of zero degrees. Tarzan ends up in the river 9 m from the origin.

Determine the equation for the parabola.

A5 On a triangle the ratios of the angles (in degrees) are 3:5:7 and the edge opposite to the smallest angle has length 1. Determine the angles and the area of the triangle.

A6 A right circular cone K has a radius of 7 cm at the base and a height of 14 cm. In the cone K one places another right circular cone L (with the radius of the base r and height h). Cone L has its vertex at the center of the base of the cone K and the periphery of the base is on the cone K. What is the largest possible volume of cone L?



Malliratkaisu

Ohessa malliratkaisu arkkitehtihakukohteiden matematiikan kokeeseen 2012. Tehtävän ohessa on suuntaa-antavat arvosteluperiaatteet. Kunkin tehtävän ratkaisu arvostellaan skaalalla 0–6p viimekädessä yhtenä kokonaisuutena. Ohessa mainittuja arvosteluperiaatteita on tulkittava mallivastauksen kaltaisen vastauksen arvosteluohjeena; yksittäisen hakijan vastausten kohdalla arvosteluohjeita ei kaikissa tapauksissa voida tulkita suoraviivaisesti.

Tehtävä 1

a) Vettä valuu hukkaa

$$1500\ \mathrm{m}^3/\mathrm{a} = 1500 \cdot 1000\ \mathrm{l}/(\underbrace{365 \cdot 24 \cdot 60}_{525600}\ \mathrm{min}) = 2,85\ \mathrm{l/min}$$

b) Vedenkulutus

$$\dot{V} = 155\ \mathrm{l/d} = 0.155 \cdot 365 \cdot 210\ \mathrm{m}^3/\mathrm{a} = 11880,75\ \mathrm{m}^3/\mathrm{a}.$$

Ilman muutosta vuotuisten kulujen ja tulojen suhde olisi

$$\frac{(\dot{V} - 1500) \cdot 3,17}{210 \cdot 15 \cdot 12} = \frac{32906,9775}{37800} = 0,8705549$$

joten tuloja, vesimaksua, voidaan laskea korkeintaan 12,9% (Ilman vuotojen tukkimista budjetti on lähes tasapainossa.)

Arvostelu: (a) 0-2p. Ertyisesti mikäli muunnos (e.g. $\mathrm{m}^3 \to \mathrm{l}$) on väärin, tehtävästä korkeintaan 1p.

(b) 0-4p. Arvostelussa V oikea lauseke ja arvo 1p, muuttuneet kustannukset 1p, oikea verranto 1p. Mikäli vuotoja ei ole ollenkaan huomioitu voidaan alakohdasta hyvittää korkeintaan 1p.

Riittämättön välivaiheen tarkkuus tai väärä vastauksen tarkkuus on kummassakin alakohdassa virhe.

Tehtävä 2

Pallojen B_1 ja B_2 säteiden r_1 ja r_2 ja tilavuuksien V_1 ja V_2 välillä on suhde

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{Cr_1^3}{Cr_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

jossa $C = \frac{3}{4}\pi$ on vakio. Tästä saamme

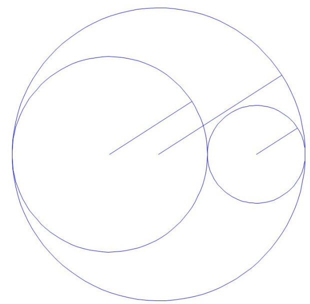
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{8^{1/3}} \quad \Leftrightarrow \quad r_2 = 2r_1.$$

Toisaalta koska keskipisteet ovat samalla suoralla ja ympyrät sivuavat toisiaan

$$2r_1 + 2r_2 = 2r \quad \Leftrightarrow \quad r_1 + r_2 = 9.$$

Yhdistämällä

$$r_1 + 2r_1 = 9; \qquad r_1 = 3; \qquad r_2 = 2r_1 = 6.$$



Arvostelu: Muodostettu tilavuuksien tai säteiden suhde oikein ja sivennetty muotoon $r_2 = 2r_1$ antaa +2p. Muodostettu $r_1 + r_2 = 9$ antaa +1p. Edellä olevan kahden tiedon yhdistäminen ja yhden säteen ratkaisu +2p, toinen säde +1p.

Tehtävä 3

a) Kahdessa kupista kuudesta on sokeria, joten Aalto saa haluamansa juoman todennäköisyydellä $p = 2/6 = 1/3$.

b) Voidaan ajatella tilannetta kahtena valintana: Aalto valitsee ensin oikein todennäköisyydellä $p_1 = 2/6$ jonka jälkeen Engel valitsee lopuista kupeista ainoan oikean $p_2 = 1/5$, jolloin kokonaistodennäköisyys on $p = p_1 p_2 = 1/15$.

c) Kaikki saavat oikean juoman tarkalleen jos sekä Aalto että Engel valitsevat oikein, tällöin ja vain tällöin loput kupit ovat ilman sokeria: $p = 1/15$.

Arvostelu: Kukin alakohta arvostellaan 0-2p.

Ratkaisu on kussakin kohdassa perusteltava; pelkkä vastaus on kussakin alakohdassa korkekeintaan 1p arvoinen.

Tehtävä 4

Kiinitetään koordinaatiakselien yksiköksi 1m. Tarkastellaan yleistä paraabelia

$$y(x) = ax^2 + bx + c; \qquad y'(x) = 2ax + b$$

Irrotushetkellä sijainti on viisimetriä origon yläpuolella:

$$y(0) = c = 5.$$

Irrotushetkellä lento on vaakasuoraa

$$y'(0) = b = 0.$$

Molskahdus tapahtuu kun $x = 9$ (tai kun $x = -9$)

$$y(9) = 9^2 a + 5 = 0; \quad a = -\frac{5}{81}.$$

Parabelin yhtälö on $y(x) = 5 - \frac{5}{81}x^2$.

Arvostelu: Osaratkaisuista vakiotermin c ratkaisu +1p, polynomin derivointi ja kertoimen b ratkaisu +2p, kertoimen a ratkaisu +2p.

Mikäli tehtävässä käyttäen hyväksi kumpaakin nollakohtaa $x = \pm 9$, täytyy toisen nollakohdan olemassaolo olla huolellisesti perusteltu. Mikäli ratkaisussa on erikseen huolellisesti perustelematta oletettu, että $b = 0$ annetaan ratkaisusta korkeintaan 3p.

Koordinaatistoakseli voidaan implisiittisesti kiinnnittää (esim.) lennonsuunta x-positiiviseksi, jolloin molskahdus pisteessä $x = 9$. Koordinaattiakselistoa voidaan käsitellä implisiittisesti 1 metrin yksiköissä ilman eri mainintaa.

Tehtävä 5

Suhteen perusteella kolmion kulmat ovat $3k, 5k, 7k$ jollakin k. Kolmion kulmien summa

$$3k + 5k + 7k = 180°$$

ja siis $k = 180°/15 = 12°$ josta kulmat $36°, 60°, 84°$. Olkoon kulmia vastaavien sivujen pituudet $a = 1, b, c$ vastaavasti. Sinilauseen avulla saadaan

$$\frac{1}{\sin 36°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin 84°}$$

josta

$$b = \frac{\sin 60°}{\sin 36°} \approx 1,4734, \qquad \text{tai} \qquad c = \frac{\sin 84°}{\sin 36°} \approx 1,6920$$

Pinta-ala saadaan nyt laskemalla sivua b vastaan olevan korkeusjanan pituus h_b (tai vastaavasti h_c) tai suoraan kahden sivun välisen kulman avulla

$$A = \frac{1}{2}\underbrace{b\ \sin 84°}_{h_b} = \frac{1}{2}\underbrace{c\ \sin 60°}_{h_c} = \frac{1}{2} bc\ \sin 36° \approx 0,73265$$

Huomaa, että yhden sivun b tai c laskeminen ja yksi tapa yllä luonnollisesti riittää tuloksen saamiseksi.

Arvostelu: Kolmion kulmien laskeminen 0-2p, pinta-alan 0-4p.

Jälkimmäisessä on tyypillinen ratkaisu käyttäen sini-lausetta. Tällöin sinilauseen soveltaminen epäonnistuneestikin +1p, toisen sivun pituuden muodostaminen +1p. Kolmion pinta-ala näiden avulla +2p; yhteensä 4p. Vaihtoehtoisesti pinta-ala voidaan laskea sivun pituuden ja sitä vastaan olevan korkeusjanan avulla: korkeusjanan muodostaminen 1p, edelleen laskettu pinta-ala edelleen +3p; yhteensä 4p.

Tehtävä 6

Merkitään kartion K korkeutta H ja pohjan sädettä R ja vastaavasti kartiolle L korkeutta h ja pohjan sädettä r. Leikkauskuviosta

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H}; \qquad h = \underbrace{\frac{H}{R}}_{2}(R-r). \tag{1}$$

Ympyräkartion L tilavuudelle V pätee

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \underbrace{\frac{H\pi}{3R}}_{\frac{2\pi}{3}\approx 2{,}094395} r^2\ (R-r). \tag{2}$$

se on suurimmillaan joko päätepisteisttä $r = R$ tai $r = 0$ tai derivaatan nollakohdassa. Koska $V = 0$ päätepisteissä, optimi saavutaan derivaatan nollakohdassa välin sisäpisteessä:

$$V'(r) = \frac{H\pi}{3R}\left[2r(R-r) - r^2\right] \quad \Leftrightarrow \quad (2R-3r)r = 0 \quad \Leftarrow \quad r = \frac{2}{3}R \approx 4,6667.$$

$$V \leq V(\frac{2}{3}R) = \frac{H\pi}{3R}\ (\frac{2}{3}R)^2\ (R - \frac{2}{3}R) = \underbrace{\frac{1}{3}\pi R^2 H}_{V_K}\ \frac{4}{27} \approx\ 106,43\,\mathrm{cm}^3.$$

Arvostelu: Suhteen (1) muodostaminen ilman sievennystäkin 1p, edelleen suureiden h tai r tai V esittäminen (jonkin) yhden muuttujan funktiona +1p. Tilavuuden lausekkeen onnistunut derivointi ja krittisen pisteen löytäminen yhteensä +2p. Reunapistetarkastelut ja vastaus viimeiset 2p.