

Arkkitehtimatematiikan koe 5.6.2024

Ohjeet: Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin oma nimesi ja henkilötunnuksesi selkeästi yläreunaan. Aloita vastaamalla kokoarkille (taitettu A3) ja jos tarvitset lisää vastaustilaa, kirjoita loput vastauksista erillisille puoliarkeille (A4). Merkitse selkeästi, jos vastaus jatkuu usealle paperille. Perustele vastauksesi. Sijoita erilliset puoliarkit kokoarkin väliin, kun palautat vastauksesi. Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja neli- tai funktiolaskin.

Tehtävä 1. Sähkön hinta nousi 20 %. Monellako prosentilla kulutus saa korkeintaan nousta, jos sähkömenot eivät saa nousta yli 30 %? (6 p.)

Mallivastaus: Merkitään sähkömenoja ennen hinnannousua M :llä ja olkoon p prosenttimäärä, jolla kulutus nousee. Tällöin uudet menot ovat $M \cdot 1,2 \cdot (1 + \frac{p}{100})$. Tämä saa korkeimmillaan olla $M \cdot 1,3$, mistä saadaan yhtälö

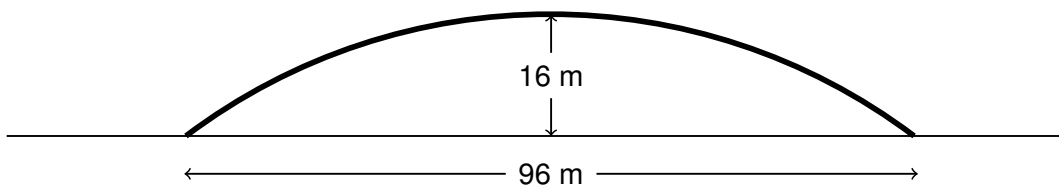
$$M \cdot 1,2 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = M \cdot 1,3 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \frac{1,3}{1,2} \Leftrightarrow p = 8,333 \dots$$

Tehtävä 2. Tietyllä asuma-alueella väestönkasvu on 2 % vuodessa. Kuinka monen vuoden kuluttua asuma-alueen väkiluku on kaksinkertaistunut? (6 p.)

Mallivastaus: Merkitään alkuperäistä väestömäärää V :llä, jolloin n vuoden kuluttua väestömäärä on $V \cdot 1,02^n$. Näin saadaan yhtälö

$$V \cdot 1,02^n = 2V \Leftrightarrow 1,02^n = 2 \Leftrightarrow n \ln 1,02 = \ln 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,02} = 35,0028 \dots$$

Tehtävä 3. 96 m leveän joen yli on rakennettu silta, jonka profiili on ympyrän kaaren muotoinen (kuva). Sil-
lan korkein kohta joen keskellä on 16 m korkeammalla kuin sillan päissä. Mikä on siltakaaren pituus? (6 p.)



Mallivastaus: Kaaren pituuden laskemiseksi on selvitettävä ympyrän säde sekä kaarta vastaavan keskuskulman suuruus. Säde saadaan yhtälöstä

$$(r - 16)^2 + 48^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 - 32r + 16^2 + 48^2 = r^2 \Leftrightarrow r = 80$$

Kaarta vastaavan keskuskulman puolikas saadaan yhtälöstä $\tan \alpha = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$, josta $\alpha = 0,643501 \dots$ (rad). Näin ollen keskuskulma on $2\alpha = 1,2870 \dots$. Täten siltakaaren pituus on $1,2870 \cdot 80 = 102,96 \dots$ (metriä).

Tehtävä 4. Keihäänheitto saavutti 80 m pituuden. Oletetaan, että tämän heiton kaari noudatti täydellisesti paraabelin kaarta xy -koordinaatistossa välillä $x \in [0, 80]$. Määrittää kaaren yhtälö, kun heiton lähtöpaikka koordinaatistossa on $(0, 0)$ ja heiton maksimikorkeus oli tasan 16 m. (6 p.)

Mallivastaus: Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Tiedetään, että kun $x = 0$ tai $x = 80$, on myös $y = 0$. Näin saadaan yhtälöt $0 = c$ ja $0 = a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + c$. Paraabelin huippukohta sijaitsee nollakohtien 0 ja 80 puolessavälissä, joten kun $x = 40$, on $y = 16$. Tästä saadaan yhtälö $16 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c$. Koska ensimmäisen yhtälön perusteella $c = 0$, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 6400a + 80b = 0 \\ 1600a + 40b = 16 \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $b = -80a$ ja sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön saadaan $-1600a = 16$, mistä $a = -\frac{1}{100}$, ja sijoittamalla tämä saadaan $b = \frac{4}{5}$. Täten kysytty paraabelin yhtälö on $y = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x$.