Arkitektmatematikens prov 5.6.2024

Instruktioner: Skriv tydligt i övre kanten av varje papper ditt namn och personsignum. Börja genom att svara på ett helark (en vikt A3:a) och fortsätt på skilda halvark (A4) ifall du behöver mer utrymme för svaret. Ange tydligt om svaret fortsätter över fler papper. Motivera dina svar. Placera de separata halvarken mellan helarket då du returnerar dina svar. Hjälpmedel: skrivredskap och mini- eller funktionsräknare.

Uppgift 1. Elpriset steg med 20 %. Med hur många procent kan förbrukningen högst öka, för att utgifterna inte ska stiga mer än 30 %? (6 p.)

Modellsvar: Beteckna elutgifterna innan prisförhöjningen med M och antag att förbrukningen ökar med p procent. Utgifterna efter prisförhöjningen är $M \cdot 1,2 \cdot (1 + \frac{p}{100})$. Utgifterna får vara högst $M \cdot 1.3$, varav fås ekvationen

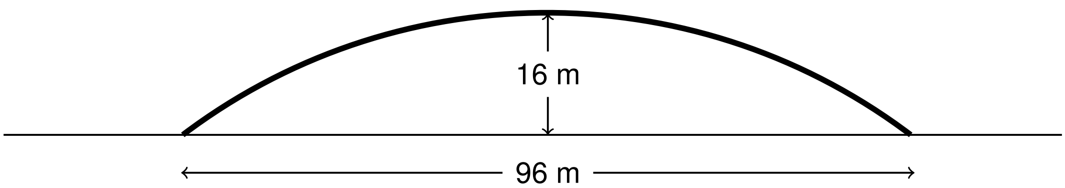
$$M \cdot 1,2 \cdot (1 + \frac{p}{100}) = M \cdot 1,3 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \frac{1,3}{1,2} \Leftrightarrow p = 8,333\ldots.$$

Uppgift 2. Antalet invånare på ett visst bostadsområde ökar med 2 % per år. Efter hur många år har invånarantalet fördubblats på detta område? (6 p.)

Modellsvar: Beteckna ursprungliga invånarantalet med V. Efter n år är invånarantalet $V \cdot 1,02^n$. Vi får följande ekvation:

$$V \cdot 1,02^n = 2V \Leftrightarrow 1,02^n = 2 \Leftrightarrow n \ln 1,02 = \ln 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,02} = 35.0028\ldots.$$

Uppgift 3. Över en 96 m bred å finns en bro vars profil har formen av en cirkelbåge (se figuren). Brons högsta punkt finns vid mitten av ån och är 16 m högre än brons ändor. Hur lång är bron? (6 p.)



Modellsvar: För att beräkna längden på bågen behövs cirkelns radie samt bågens medelpunktsvinkel. Radie erhålls från ekvationen

$$(r - 16)^2 + 48^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 - 32r + 16^2 + 48^2 = r^2 \Leftrightarrow r = 80$$

Bågens halva medelpunktsvinkel fås från ekvationen $\tan \alpha = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$, varifrån fås $\alpha = 0,643501\ldots$ (rad). Således är medelpunktsvinkeln $2\alpha = 1,2870\ldots$. Eftersom är brons längd $1,2870 \cdot 80 = 102,96\ldots$ (meter).

Uppgift 4. Ett spjutkast uppnådde en längd om 80 m. Antag att bågen för kastet hade formen av en parabel i (x, y)-koordinatsystemet i intervallet $x \in [0, 80]$. Bestäm ekvationen för bågen, när kastets startpunkt i koordinatsystemet är $(0, 0)$ och kastets högsta punkt är 16 m ovanför marken. (6 p.)

Modellsvar: Parabelns ekvation har formen $y = ax^2 + bx + c$. Man vet att när $x = 0$ eller $x = 80$, så är $y = 0$. Från detta fås ekvationerna $0 = c$ och $0 = a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + c$. Parabelns topp finns mittemellan nollställena

0 och 80, varvid fås att $y = 16$ när $x = 40$. Från detta fås ekvationen $16 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c$. Från första ekvationen fås att $c = 0$ och vi får följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 6400a + 80b &= 0 \\ 1600a + 40b &= 16 \end{cases}$$

Från första ekvationen fås att $b = -80a$ och genom insättning v detta i andra ekvationen fås $-1600a = 16$, varvid $a = -\frac{1}{100}$. Genom insättning av a fås att $b = \frac{4}{5}$.
Ekvationen för den efterfrågade parabeln är $y = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x$.