Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2020

Arkkitehtimatematiikan koe 3.6.2020, Ratkaisut

1. Anna kaikissa kohdissa vastaukset tarkkoina arvoina.

a) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} = 3$? (1 p.)

b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{5} = 3$? (1 p.)

c) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 3$? (1 p.)

d) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $x - 5 = 16$? (1 p.)

e) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $(x-5)^2 = 16$? (1 p.)

f) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $|x-5| = 16$? (1 p.)

Ratkaisu:

a) Huomataan, että

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2} - \frac{4}{5} = 3 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot x}{5 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 5} = 3 \Leftrightarrow \frac{5x}{10} - \frac{8}{10} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5x-8}{10} = 3 \Leftrightarrow 5x - 8 = 10 \cdot 3 \Leftrightarrow 5x - 8 = 30 \\ \Leftrightarrow\ & 5x = 38 \Leftrightarrow x = \frac{38}{5} \Leftrightarrow x = 7\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} = 3$, on $x = 7\frac{3}{5}$.

Vastaus: Ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} = 3$, on $x = 7\frac{3}{5}$.

b) Huomataan, että

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{5} = 3 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 4}{2 \cdot 5} = 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{10} = 3 \Leftrightarrow 4x = 10 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow\ & 4x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{4} \Leftrightarrow x = 7\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{5} = 3$, on $x = 7\frac{1}{2}$.

Vastaus: Ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{5} = 3$, on $x = 7\frac{1}{2}$.

c) Huomataan, että

$$\begin{aligned} & \frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{5}{4} = 3 \Leftrightarrow \frac{x \cdot 5}{2 \cdot 4} = 3 \Leftrightarrow \frac{5x}{8} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & 5x = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5} \Leftrightarrow x = 4\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 3$, on $4\frac{4}{5}$.

Vastaus: Ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{x}{2} : \frac{4}{5} = 3$, on $4\frac{4}{5}$.

d) Huomataan, että

$$x - 5 = 16 \Leftrightarrow x = 16 + 5 \Leftrightarrow x = 21.$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $x - 5 = 16$, on $x = 21$.

Vastaus: Ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $x - 5 = 16$, on $x = 21$.

e) Huomataan, että

$$\begin{aligned} & (x-5)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 5 = \sqrt{16} \text{ tai } x - 5 = -\sqrt{16} \\ \Leftrightarrow\ & x - 5 = 4 \text{ tai } x - 5 = -4 \\ \Leftrightarrow\ & x = 4 + 5 \text{ tai } x = -4 + 5 \\ \Leftrightarrow\ & x = 9 \text{ tai } x = 1. \end{aligned}$$

Näin ollen ainoat reaaliluvut x, jotka toteuttavat yhtälön $(x-5)^2 = 16$, ovat $x = 9$ ja $x = 1$.

Vastaus: Ainoat reaaliluvut x, jotka toteuttavat yhtälön $(x-5)^2 = 16$, ovat $x = 9$ ja $x = 1$.

f) Huomataan, että

$$\begin{aligned} & |x-5| = 16 \Leftrightarrow x - 5 = 16 \text{ tai } -(x-5) = 16 \\ \Leftrightarrow\ & x - 5 = 16 \text{ tai } -x + 5 = 16 \\ \Leftrightarrow\ & x = 21 \text{ tai } -x = 16 - 5 \\ \Leftrightarrow\ & x = 21 \text{ tai } -x = 11 \\ \Leftrightarrow\ & x = 21 \text{ tai } x = -11. \end{aligned}$$

Näin ollen ainoat reaaliluvut x, jotka toteuttavat yhtälön $|x-5| = 16$, ovat $x = 21$ ja $x = -11$.

Vastaus: Ainoat reaaliluvut x, jotka toteuttavat yhtälön $|x-5| = 16$, ovat $x = 21$ ja $x = -11$.

2. Pirkko aikoo maalata pihaterassinsa katosta. Maaliseokseen tarvitaan 18 litraa valkoista maalia ja 8 desilitraa harmaata sävytemaalia. Pirkko ostaa yhden ison purkin (20 l) valkoista maalia ja yhden pienen purkin (1 l) harmaata sävytemaalia.

a) Kesäkuussa iso purkki valkoista maalia maksaa $216,90$ euroa ja pieni purkki harmaata sävytemaalia maksaa $33,90$ euroa. Heinäkuussa ison valkoisen maalipurkin hinta nousee 14%. Pienen sävytemaalin hinta pysyy ennallaan. Kuinka paljon maalipurkit maksavat yhteensä valkoisen maalin hinnankorotuksen jälkeen?

(2 p.)

b) Kesäkuussa iso purkki valkoista maalia maksaa $216,90$ euroa ja pieni purkki harmaata sävytemaalia maksaa $33,90$ euroa. Heinäkuussa ison valkoisen maalipurkin hinta nousee 14%. Elokuussa pienen sävytemaalipurkin hinta laskee 16%. Kuinka paljon maalipurkit maksavat yhteensä valkoisen maalin hinnankorotuksen ja harmaan maalin hinnanalennuksen jälkeen?

(2 p.)

c) Kesäkuussa iso purkki valkoista maalia maksaa $216,90$ euroa ja pieni purkki harmaata sävytemaalia maksaa $33,90$ euroa. Heinäkuussa ison valkoisen maalipurkin hinta nousee 14%. Tämän jälkeen elokuussa kummankin maalipurkin hinta laskee 16%. Kuinka paljon maalipurkit maksavat yhteensä kaikkien näiden hinnanmuutosten jälkeen?

(2 p.)

Ratkaisu:

a) Valkoisen maalin hinnankorotuksen jälkeen maalipurkkien yhteishinta on

$$(1+0,14)\cdot 216,90 \text{ euroa} + 33,90 \text{ euroa} \approx 281,17 \text{ euroa}.$$

Vastaus: Valkoisen maalin hinnankorotuksen jälkeen maalipurkkien yhteishinta on $281,17$ euroa.

b) Hinnanmuutosten jälkeen maalipurkkien yhteishinta on

$$(1+0,14)\cdot 216,90 \text{ euroa} + (1-0,16)\cdot 33,90 \text{ euroa} \approx 275,74 \text{ euroa}.$$

Vastaus: Hinnanmuutosten jälkeen maalipurkkien yhteishinta on $275,74$ euroa.

c) Hinnanmuutosten jälkeen maalipurkkien yhteishinta on

$$(1-0,16)(1+0,14)\cdot 216,90 \text{ euroa} + (1-0,16)\cdot 33,90 \text{ euroa} \approx 236,18 \text{ euroa}.$$

Vastaus: Hinnanmuutosten jälkeen maalipurkkien yhteishinta on $236,18$ euroa.

3. Tasakylkisen kolmion K kanta on a m ja korkeus on $(10-a)$ m.

a) Laske kolmion K piiri. (2 p.)

b) Laske kolmion K pinta-ala. (2 p.)

c) Millä vakion a arvolla kolmion K pinta-ala on suurin? (2 p.)

Ratkaisu:

a) Tiedetään, että tasakylkisen kolmion K kanta on a m ja korkeus on $(10-a)$ m. Olkoon kolmion K kyljen pituus k m. Pythagoraan lauseen nojalla

$$k = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (10-a)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 100 - 20a + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - 20a + 100}.$$

Näin ollen kolmion K piiri on

$$\left(a + 2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}a^2 - 20a + 100}\right) \text{ m}.$$

Vastaus: Kolmion K piiri on $\left(a + 2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}a^2 - 20a + 100}\right)$ m.

b) Tiedetään, että tasakylkisen kolmion K kanta on a m ja korkeus on $(10-a)$ m. Näin ollen kolmion K pinta-ala on

$$\frac{a(10-a)}{2}\ \mathrm{m}^2 = -\frac{1}{2}a^2 + 5a\ \mathrm{m}^2.$$

Vastaus: Kolmion K pinta-ala on $-\frac{1}{2}a^2 + 5a\ \mathrm{m}^2$.

c) Kohdan b nojalla kolmion K pinta-ala on $-\frac{1}{2}a^2 + 5a\ \mathrm{m}^2$. Koska kolmion K kanta on a m ja korkeus on $10-a$ m, tiedetään, että $a \in [0,10]$. Tarkastellaan muuttujan a funktiota

$$f(a) = -\frac{1}{2}a^2 + 5a, a \in [0,10].$$

Funktio f on derivoituva välillä $(0,10)$, joten sen maksimiarvo välillä $[0,10]$ on joko välin jommassa kummassa päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa. Funktion f derivaatta

$$\frac{d}{da}f(a) = -2\frac{1}{2}a + 5 = -a + 5.$$

Lasketaan funktion f derivaatan nollakohta. Huomataan, että

$$-a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5.$$

Lasketaan funktion f arvo välin $[0,10]$ päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa. Saadaan

$$f(0) = -\frac{1}{2}\cdot 0^2 + 5\cdot 0 = 0,$$

$$f(10) = -\frac{1}{2}\cdot 10^2 + 5\cdot 10 = 0$$

ja

$$f\big(5\big) = -\frac{1}{2}\cdot 5^2 + 5\cdot 5 = \frac{25}{2}.$$

Näin ollen kolmion K pinta-ala on suurin vakion a arvolla 5.

Vastaus: Kolmion K pinta-ala on suurin vakion a arvolla 5.

4. Tasaiselle alustalle rakennetaan betoninen kaarisilta. Sillan yläpinta on vaakasuorassa oleva taso, joka sijaitsee maanpinnasta korkeudella $4,5$ m. Sivulta katsottuna sillan alapinta on muodoltaan kaareva ja xy-tasoon piirrettynä sen muodon määrää lauseke

$$y(x) = a - \frac{x^2}{9},$$

missä x ja y -akselien yksikkönä on 1 m, x-akseli on sillan tasainen alusta ja sillan keskipiste sijaitsee pisteen $(0,0)$ yläpuolella. Silta on 16 m pitkä ja 6 m leveä. Sillan paksuus siltakannen keskipisteestä kohtisuoraan alaspäin mitattuna on $0,5$ m.

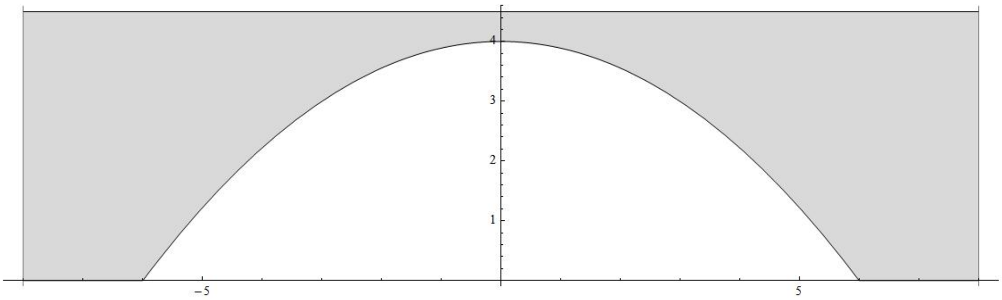
a) Piirrä sillan sivuprofiilikuva. (1 p.)

b) Laske vakion $a > 0$ tarkka arvo. (2 p.)

c) Laske kuinka monta kuutiometriä betonia sillan valamiseen tarvitaan. (3 p.)

Ratkaisu:

a)



b) Tiedetään, että sillan keskipiste sijaitsee kohdassa $x = 0$, sillan yläpinta sijaitsee korkeudella $4,5$ m ja sillan paksuus siltakannen keskipisteestä kohtisuoraan alaspäin mitattuna on $0,5$ m. Sillan kannen alapinnan muodon määrää lauseke $y(x) = a - \frac{x^2}{9}$. Näin ollen niin

$$y(0) = a = 4,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 4 \text{ m}.$$

Vastaus: Vakion a arvo on 4 m.

c) Tarvittavan betonin määrä saadaan laskemalla sillan sivuprofiilin pinta-ala ja kertomalla tämä sillan leveydellä (6 metriä). Sillan sivuprofiilin muodostaa suorakulmio, jossa kannan pituus on 16 metriä ja korkeus 4,5 metriä, josta poistetaan sillan alapintaa kuvaavan kaaren $y(x) = 4 \text{ m} - \frac{x^2}{9}$ ja x-akselin väliin jäävä alue. Lasketaan ensin kaaren $y(x) = \text{ m} - \frac{x^2}{9}$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala. Tätä varten selvitetaan polynomin $4 - \frac{x^2}{9}$ nollakohdat. Saadaan

$$4 - \frac{x^2}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} = 4 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \sqrt{36} = 6 \text{ tai } x = -\sqrt{36} = -6.$$

Koska

$$\int_{-6}^{6} 4x - \frac{x^2}{9}\,dx = \Big/_{-6}^{6} 4x - \frac{x^3}{27} = 4 \cdot 6 - \frac{6^3}{27} - (4 \cdot (-6) - \frac{(-6)^3}{27}) = 32,$$

niin sillan sivuprofiilin pinta-ala on

$$4,5 \cdot 16 \text{ m}^2 - 32 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$$

ja sillan tilavuus on

$$40 \cdot 6 \text{ m}^3 = 240 \text{ m}^3.$$

Vastaus: Sillan valamiseen tarvitaan 240 kuutiometriä betonia.