Matematiikka | Tehtävä 1.

Matematik | Uppgift 1.

Mathematics | Question 1.

Mallivastaukset:

a) Yhtälön molemmat puolet on määritelty kun $x \neq \pm 1$. Tällöin $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Tulon nollasäännön perusteella ratkaisut ovat $x = 2$ sekä $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

c) $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$.

d) $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$, missä C on vakio.

e) Kosinin jaksollisuuden perusteella yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Tämän toinen ratkaisu on vastakkaismerkkinen kulma $x = -\frac{\pi}{3}$ ja kaikki ratkaisut saadaan lisäämällä täyden ympyrän monikerrat: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) Todennäköisyys vähintään yhdelle voitolle on komplementaarinen sille, että ei saada yhtään voittoa. Näin ollen kysytty todennäköisyys on $1 - 0,99^{10} = 0,0956179\ldots$. Prosentteina ilmaistuna tämä on likimain $9,56\,\%$.

Modellsvar:

a) Ekvationens båda led är definierade när $x \neq \pm 1$. Då gäller att $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b) Nollproduktmetoden ger lösningarna $x = 2$ och $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

c) $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$.

d) $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$, där C är konstant.

e) Ekvationen kan skrivas på formen $2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Ekvationens andra lösning är $x = -\frac{\pi}{3}$ och cosinusfunktionens periodicitet ger de övriga lösningarna: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) Komplementhändelsen till åtminstone en vinst är att man inte får någon vinst. Sannolikheten för åtminstone en vinst kan sålunda beräknas med komplementet enligt: $1 - 0,99^{10} = 0,0956179\ldots$.
I procentform är sannoliheten ca $9,56\,\%$.

Model responses:

a) Both sides of the equation are defined if $x \neq \pm 1$. Then $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

b) By the zero-product property, the solutions are $x = 2$ and $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

c) $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$.

d) $\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$, where C is a constant.

e) By the periodicity of cosine, we can derive $2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Another solution to this is an angle of opposite sign, $x = -\frac{\pi}{3}$, and all solutions are obtained by adding the multiples of full circles: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

f) The probability of at least one win is complementary to the probability of no win. Thus, the requested probability is $1 - 0.99^{10} = 0.0956179\ldots$. Expressed as a percentage, this is approximately 9.56%.

Matematiikka | Tehtävä 2.

Matematik | Uppgift 2.

Mathematics | Question 2.

Mallivastaukset:

a) Jotta 10 litran tankissa olisi 1 % voiteluöljyä, pitää sen tilavuuden olla $\frac{10}{100}\,\mathrm{l} = 0,1\,\mathrm{l}$. Tankkaamalla x l 5-prosenttia voiteluöljyä sisältävää seosta saadaan $0,05x$ litraa öljyä ja yhtälöksi $0,05x = 0,1 \Leftrightarrow x = 2$.

   Stinan tulee siis tankata 2 litraa 5-prosenttista seosta ja 8 litraa polttoainetta, jossa ei ole voiteluöljyä lainkaan.

b) Olkoon x 5-prosenttisen seoksen määrä seosta. Tällöin tankattu kokonaismäärä on $6 + x$ ja voiteluöljyn määrä $\frac{5}{100}x$. Täten yhtälöksi saadaan

$$\frac{\frac{5}{100}x}{6+x} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x = \frac{1}{100}(6+x) \Leftrightarrow 5x = 6 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5.$$

   Stinan tulee siis tankata vielä 1, 5 l 5-prosenttista seosta.

Modellsvar:

a) För att en 10 liters tank ska bestå av 1 % smörjolja, borde volymen för smörjoljan vara $\frac{10}{100}\,\mathrm{l} = 0,1\,\mathrm{l}$. Genom att tanka x liter av bränslet som innehåller 5-procent smörjmedel fås $0,05x$ liter smörjolja. Vi kan ställa upp ekvationen $0,05x = 0,1 \Leftrightarrow x = 2$. Stina borde m.a.o. tanka 2 liter av 5-procentiga bränslet och 8 liter av bränslet som inte innehåller någon olja.

b) Antag att x är mängden av 5-procentiga bränslet som finns i blandningen. Totala mängden som tankats är $6 + x$ och mängden smörjolja är $\frac{5}{100}x$. Vi får ekvationen

$$\frac{\frac{5}{100}x}{6+x} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x = \frac{1}{100}(6+x) \Leftrightarrow 5x = 6 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5.$$

   Stina borde tanka 1, 5 liter till av 5-procentiga bränslet.

Model responses:

a) To have 1% of lubricating oil in 10 liter tank, its volume has to be $\frac{10}{100}\,\mathrm{l} = 0,1\,\mathrm{l}$. By refuelling x l 5-percentage mixture we get $0.05x$ liters of lubricating oil, and equation $0.05x = 0.1 \Leftrightarrow x = 2$.

   Stina hence needs to refuel 2 liters of 5-percentage mixture and 8 liters of fuel with no lubricating oil.

b) Let x be the amount of 5-percentage mixture. Hence the total volume refuelled is $6 + x$, and the amount of lubricating oil is $\frac{5}{100}x$. Hence we get.

$$\frac{\frac{5}{100}x}{6+x} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{5}{100}x = \frac{1}{100}(6+x) \Leftrightarrow 5x = 6 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Stina then needs to refuel another 1.5 l of 5-percentage mixture.

Matematiikka | Tehtävä 3.

Matematik | Uppgift 3.

Mathematics | Question 3.

Mallivastaukset:

a) Yhtälön kummatkin puolet on määritelty vain jos $x \geq 0$. Merkitään $f(x) = 2x^2 + a - \sqrt{x}$, jolloin kysymys palautuu funktion f nollakohtien määrään, kun $x \geq 0$, niitä pitää olla tasan yksi. Voidaan havaita, että $f(0) = a > 0$, ja jos $b > 1$, on $4b^3 > 1 \Rightarrow 4b^4 > b \Rightarrow 2b^2 > \sqrt{b}$ ja siksi $f(b) = 2b^2 + a - \sqrt{b} > 0$. Näin ollen funktion f ainoat mahdolliset nollakohdat ovat välillä $[0, 1]$.

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Koska funktion f derivaatalla on vain yksi nollakohta $\frac{1}{4}$, funktio saa negatiivisia arvoja vain jos $f(\frac{1}{4}) < 0$. Tällöin nollakohtia on kaksi. Jos $f(\frac{1}{4}) = 0$, on nollakohtia tasan 1.

Sijoittamalla $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + a - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$ saadaan yhtälöstä $f(\frac{1}{4}) = 0$ ratkaisu $a = \frac{3}{8}$.

b) Olkoon a maalatun alueen x-koordinaatti maalin loppuessa. Maalatun alueen pinta-ala on

$$A = \int_{-6}^{a} \frac{1}{9}x^2\,dx = \Big/_{-6}^{a} \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}(a^3 - (-6)^3).$$

Tästä saadaan yhtälö

$$\frac{1}{27}(a^3 + 216) = 7 \Leftrightarrow a^3 = -27 \Leftrightarrow a = -3.$$

Maalatun alueen reuna on siis $-3 - (-6) = 3$ pituusyksikön päässä vasemmasta reunasta.

Modellsvar:

a) Ekvationens båda led är definierade ifall $x \geq 0$. Betecknar enligt $f(x) = 2x^2 + a - \sqrt{x}$, så är frågan ekvivalent med att visa att funktionen f har precis ett nollställe när $x \geq 0$. Vi kan observera att $f(0) = a > 0$, och ifall $b > 1$, är $4b^3 > 1 \Rightarrow 4b^4 > b \Rightarrow 2b^2 > \sqrt{b}$, varvid $f(b) = 2b^2 + a - \sqrt{b} > 0$. Därav finns funktionens, f, enda nollställen i intervallet $[0, 1]$.

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Eftersom derivatan endast har ett nollställe, $\frac{1}{4}$, får funktionen negativa värden endast ifall $f(\frac{1}{4}) < 0$. Detta leder dock till att funktionen har två nollställen. Ifall $f(\frac{1}{4}) = 0$, har funktionen endast ett nollställe. Insättning ger $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + a - \frac{1}{2} = a - \frac{3}{8}$, varefter ekvationen $f(\frac{1}{4}) = 0$ ger lösningen $a = \frac{3}{8}$.

b) Antag att a är det målade områdets x-kordinat där målfärgen tagit slut. Arean för det målade området är

$$A = \int_{-6}^{a} \frac{1}{9}x^2\,dx = \Big/_{-6}^{a} \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}(a^3 - (-6)^3).$$

Vi kan ställa upp ekvationen

$$\frac{1}{27}(a^3 + 216) = 7 \Leftrightarrow a^3 = -27 \Leftrightarrow a = -3.$$

Det målade områdets högra kant är $-3 - (-6) = 3$ längdenheter ifrån den vänstra kanten.

Model responses:

a) The both sides of the equation are defined only if $x \geq 0$. Denoting $f(x) = 2x^2 + a - \sqrt{x}$, the question reduces to the number of zeros of f, when $x \geq 0$, there has to be exactly one. We can observe that $f(0) = a > 0$, and if $b > 1$, also $4b^3 > 1 \Rightarrow 4b^4 > b \Rightarrow 2b^2 > \sqrt{b}$ and hence $f(b) = 2b^2 + a - \sqrt{b} > 0$. Hence the only possible zeros of f are in $[0, 1]$.

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Because the derivative of f has only one zero $\frac{1}{4}$, function has negative values only if $f(\frac{1}{4}) < 0$. In this case, there are two zeros. If $f(\frac{1}{4}) = 0$, there is exactly 1 zero.

By substituting, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + a - \frac{1}{2}$, and equation $f(\frac{1}{4}) = 0$ gives $a = \frac{3}{8}$.

b) Let a be the x-coordinate of the painted area when the paint runs out. The area of the painted region is

$$A = \int_{-6}^{a} \frac{1}{9}x^2\,dx = \Big/_{-6}^{a} \frac{1}{27}x^3 = \frac{1}{27}(a^3 - (-6)^3).$$

We get

$$\frac{1}{27}(a^3 + 216) = 7 \Leftrightarrow a^3 = -27 \Leftrightarrow a = -3.$$

The border of the painted region is hence $-3 - (-6) = 3$ units from the left edge.