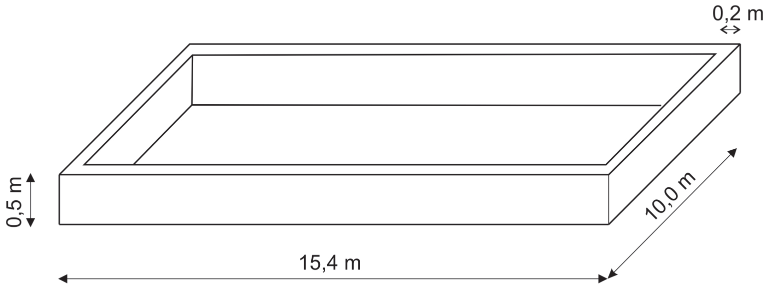
Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2022

Arkkitehtimatematiikan koe 8.6.2022

Ohjeet: Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin oma nimesi ja henkilötunnuksesi selkeästi yläreunaan. Aloita vastaamalla kokoarkille (taitettu A3) ja jos tarvitset lisää vastaustilaa, kirjoita loput vastauksista erillisille puoliarkeille (A4). Merkitse selkeästi, jos vastaus jatkuu usealle paperille. Perustele vastauksesi. Sijoita erilliset puoliarkit kokoarkin väliin, kun palautat vastauksesi. Apuvälineet: Kirjoitusvälineet ja neli- tai funktiolaskin.

Tehtävä 1. Taloa varten valetaan betonista sokkeli, jonka paksuus on 20 cm, korkeus 50 cm ja ulkomitat $15,4$ m $\times$ 10 m. Betoni koostuu sementin ja veden seoksesta, johon lisätään kivimursketta.



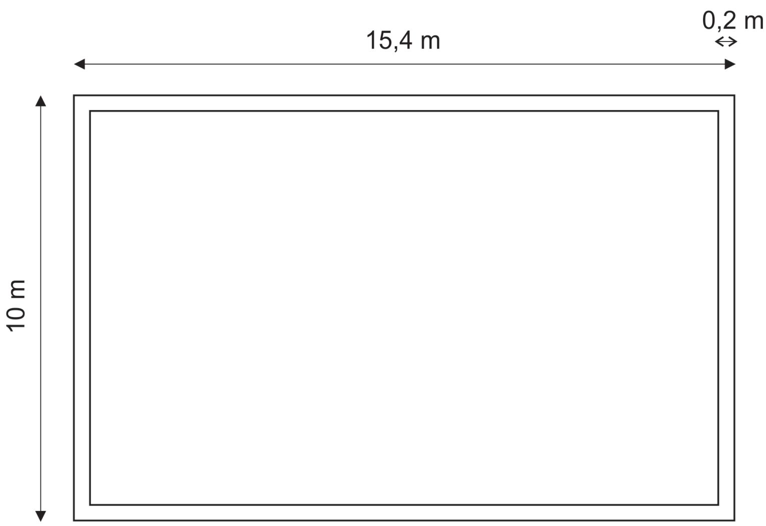
a) Kuinka monta kuutiometriä betonia tarvitaan sokkelia varten? (3 p.)

b) Rakennusmestari tahtoo valussa käytettävän betonia, jossa on 65 % mursketta, mutta firma on erehdyksessä toimittanut betonia, jossa on 80 % mursketta. Firma korjaa virheensä lisäämällä betoniin sementin ja veden seosta, jolloin murskeen osuus pienenee. Kuinka monta kuutiometriä pitää sekoittaa firman toimittamaa betonia sementin ja veden seokseen, jotta saataisiin täsmälleen valussa tarvittava määrä betonia, jossa on 65% mursketta? Prosentit ovat tilavuusprosentteja. (3 p.)

Mallivastaus: a) Ylhäältä katsottuna sokkeli peittää pinta-alan A, joka saadaan vähentämällä sisemmän suorakulmion ala ulomman alasta (kuva).

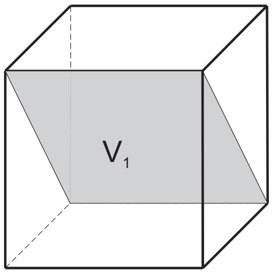
$$A = 15,4 \cdot 10 - (15{,}4 - 0{,}4) \cdot (10 - 0{,}4) = 10$$

Tilavuus saadaan kertomalla tämä pinta-ala korkeudella: $V = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ (m^3).

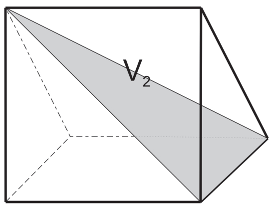


b) Olkoon V tarvittava määrä firman toimittamaa betonia. Tässä on mursketta $0{,}8V$ ja sekoituksen jälkeen haluttu murskeen tilavuus on $0{,}65 \cdot 5 = 3{,}25$. Yhtälöstä $0{,}8V = 3{,}25$ saadaan $V = 4{,}0625$ (m^3).

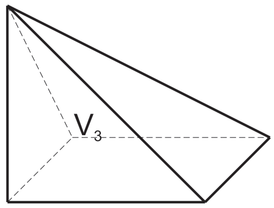
Tehtävä 2. Leikataan kuutiota kuvien mukaisesti. Ensimmäinen leikkaus noudattaa kuvan 1 harmaalla merkittyä tasoa, minkä jälkeen kuutiosta jää yläosan poistamisen jälkeen kuvan 2 mukainen osa. Tämän jälkeen kappaleesta poistetaan kuvan 2 harmaaksi merkityn tason yläpuolinen osa, jolloin jäljelle jää kuvan 3 esittämä kappale. Kuution särmän pituus on a.



Kuva 1



Kuva 2



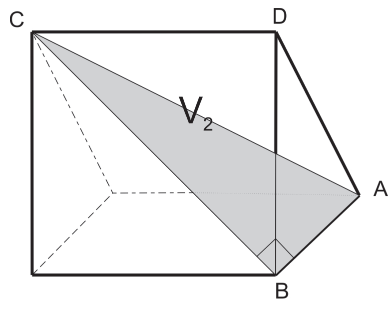
Kuva 3

a) Mikä kuvassa 1 esiintyvän osan tilavuus V_1, joka jää leikkauspinnan alapuolelle? Entä kuvassa 2 tilavuus V_2, joka jää leikkauspinnan yläpuolelle? Entä mikä on kuvan 3 mukaisen osan tilavuus V_3, joka jää lopulta jäljelle? (3 p.)

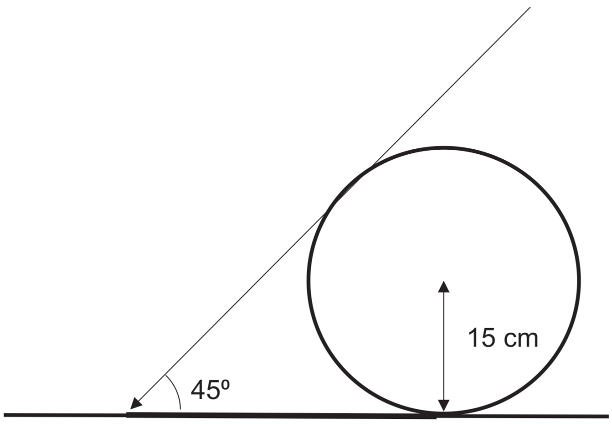
b) Mikä on kuvassa 2 olevan harmaaksi väritetyn kolmion pinta-ala? (3 p.)

Mallivastaus: a) V_1 on puolet kuution tilavuudesta siis $V_1 = \frac{1}{2}a^3$. Kuvassa 2 leikkauspinnan yläpuolinen kappale on kartio, jonka pohja ABD (kuva alla) on puolet alkuperäisen kuution oikeanpuoleisesta tahkosta, siis pohjan pinta-ala on $\frac{1}{2}a^2$. Korkeus puolestaan on a (jana DC), joten $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$. Tilavuus V_3 saadaan joko erotuksena $a^3 - V_1 - V_2 = \frac{1}{3}a^3$ tai suoraan havaitsemalla, että kyseessä on kartio, jonka pohjan pinta-ala on a^2 ja korkeus a.

b) Kolmio ABC on suorakulmainen. Sen kannaksi voidaan valita AB ja korkeusjanaksi BC. Pythagoraan lauseen mukaan janan BC pituus on $\sqrt{2}a$ ja kysytty pinta-ala siis $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$.



Tehtävä 3. Vaakasuoralla pöydällä on pallo, jonka säde on 15 cm. Aurinko paistaa 45 asteen kulmassa pöytätasoon nähden. Kuinka kauas varjo ulottuu pallon takapuolelle pöydän ja pallon kosketuspisteestä mitattuna? (6 p.)

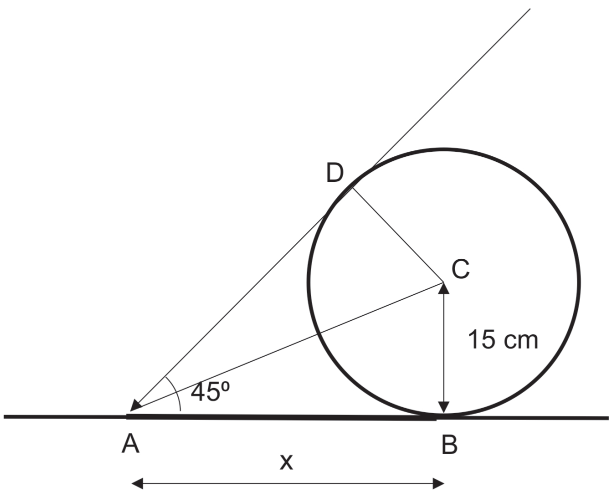


Mallivastaus: Alla olevassa kuvassa suorakulmaiset kolmiot ABC ja ADC ovat yhtenevät, koska niillä on yhteinen hypotenuusa ja kummankin lyhyempi kateetti on sama kuin ympyrän säde. Näin ollen kulma *BAC* puolittaa 45° kulman *BAD* ja on siis suuruudeltaan 22,5°. Varjon pituudelle x saadaan siis yhtälö

$$\tan 22{,}5^\circ = \frac{15}{x},$$

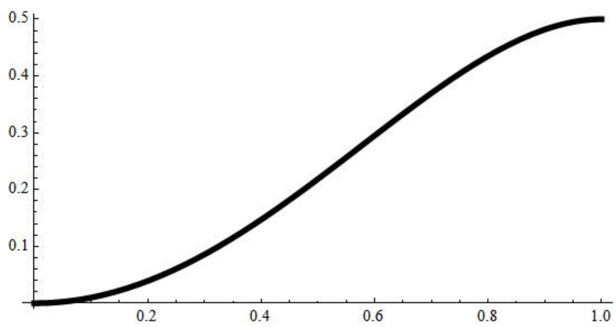
josta

$$x = \frac{15}{\tan 22{,}5^\circ} = 36{,}2132\ldots.$$



Tehtävä 4. Rinteen poikkileikkaus välillä $0 \leq x \leq 1$ noudattaa käyrän $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$ muotoa (kuva). Onko välillä $0 \leq x \leq 1$ missään kohtaa käyrän tangentin kulmakerroin suurempi kuin $\frac{1}{\sqrt{3}}$? (6 p.)

Huomautus: Koska $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, voitaisiin kysymys yhtä hyvin muotoilla seuraavasti: Onko välillä $0 \leq x \leq 1$ missään kohtaa rinteen nousukulma suurempi kuin 30°?



Mallivastaus: Nousukulman tangentti saadaan derivaatan $g(x) = f'(x) = 2x - 2x^3$ arvosta kussakin pisteessä $0 \leq x \leq 1$. Tämän maksimiarvo puolestaan löytyy funktion $g(x)$ derivaatan nollakohdista tai välin $[0, 1]$ päätepisteistä. Selvästi $g(0) = g(1) = 0$, joten lasketaan

$$g'(x) = 2 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

jolloin siis funktion g maksimi välillä $[0, 1]$ löytyy pisteestä $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Tässä pisteessä on

$$g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Huomautus: Nousukulma tässä pisteessä on

$$\tan^{-1}(\frac{4}{3\sqrt{3}}) \approx 37{,}58^\circ > 30^\circ.$$