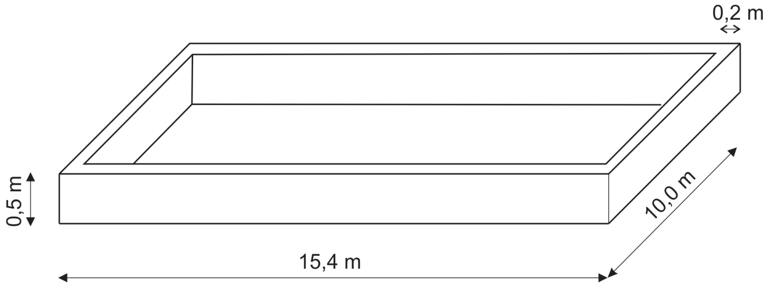
Diplomingeniörs- och- ja arkitektutbildiningens urvalsprov 2022

Provet i arkitektmatematik 8.6.2022

Anvisningar: Skriv tydligt i övre kanten på varje svarspapper ditt namn och personsignum. Börja genom att svara på ett helark (en vikt A3:a) och fortsätt på skilda halvark (A4) ifall du behöver mer utrymme för svaret. Ange tydligt om svaret fortsätter över fler papper. Motivera dina svar. Placera de separata halvarken mellan helarket då du returnerar dina svar. Hjälpmedel: skrivdon och mini- eller funktionsräknare.

Uppgift 1. För att bygga ett hus gjuter man en betongsockel med tjockleken 20 cm, höjden 50 cm och de yttre måtten $15,4$ m $\times$ 10 m. Betongen består av en blandning av cement och vatten med en tillsats av stenkross.



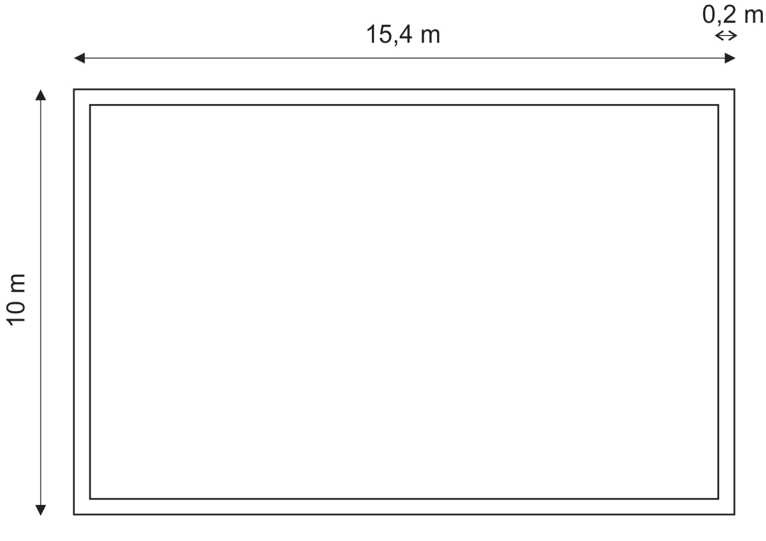
a) Hur många kubikmeter betong behövs för sockeln? (3 p.)

b) För gjutningen vill byggmästaren använda en betong som innehåller 65 % kross, men firman har av misstag levererat betong med 80 % kross. Firman korrigerar sitt misstag genom att tillföra betongen en blandning av cement och vatten varvid andelen kross minskar. Hur många kubikmeter av betongen som firman levererat bör man röra ner i cement- och vattenblandingen för att få exakt den mängd betong som behövs för gjutningen och som innehåller 65% kross? Procenterna är volymprocenter. (3 p.)

Modellsvar: a) Uppifrån sett täcker sockeln en yta A som fås genom att man subtraherar den inre rektangelns area från den yttre rektangelns (Figur).

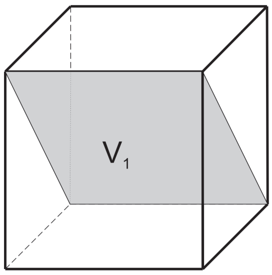
$$A = 15,4 \cdot 10 - (15,4 - 0,4) \cdot (10 - 0,4) = 10$$

Volymen fås genom att multiplicera ytan med höjden: $V = 10 \cdot 0,5 = 5$ (m^3).

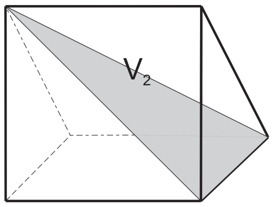


b) Den behövliga volymen betong som levereras av firman betecknas med V. I den är andelen kross $0{,}8V$ och efter omröring är den önskade volymen kross $0{,}65 \cdot 5 = 3{,}25$. Ur ekvationen $0{,}8V = 3{,}25$ fås $V = 4{,}0625$ (m^3).

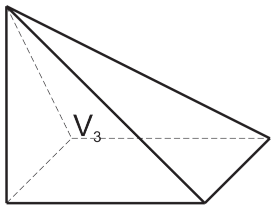
Uppgift 2. Man gör snitt i en kub enligt figurerna. Det första snittet följer ytan som markerats med grått i figur 1 och då den övre delen avlägsnas återstår delen som avbildats i figur 2. Därefter avlägsnar man från objektet den del som ligger ovanför ytan som markerats med grått i figur 2, varvid objektet som avbildats i figur 3 återstår. Kubens sidlängd är a.



Figur 1



Figur 2

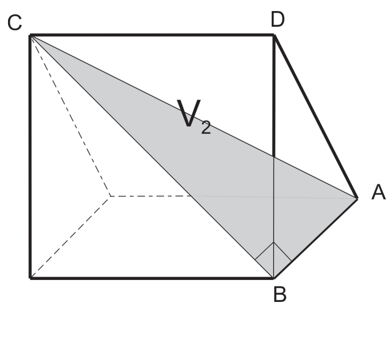


Figur 3

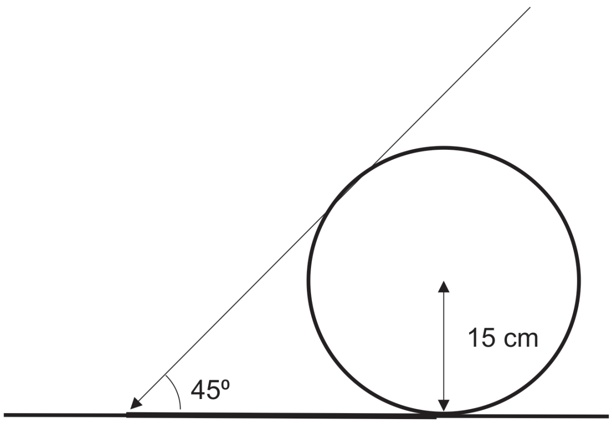
a) Vad är volymen V_1 för den del i figur 1 som blir under snittytan? Hur är det med volymen V_2 för delen som blir ovanför snittytan i figur 2? Hur stor är volymen V_3 för delen i figur 3 som till slut återstår? (3 p.)
b) Vad är arean för triangeln som markerats med grått i figur 2? (3 p.)

Modellsvar: a) V_1 är hälften av kubens volym, dvs. $V_1 = \frac{1}{2}a^3$. I figur 2 är objektet ovanför snittytan en kon, vars botten ABD (bild nedan) är hälften av den ursprungliga kubens högra sidyta, dvs. bottenarean är $\frac{1}{2}a^2$. Höjden däremot är a (sträckan DC) och sålunda är $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$. Volymen V_3 fås antingen ur differensen $a^3 - V_1 - V_2 = \frac{1}{3}a^3$, eller genom att notera att det handlar om en kon vars bottenarea är a^2 och höjd a.

b) Triangeln ABC är rätvinklig. Dess bas kan väljas som AB och höjd BC, Enligt Pythagoras sats har sträckan BC längden $\sqrt{2}a$ och den eftersökta arean är därmed $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$.



Uppgift 3. På ett horisontellt bord ligger en boll, vars radie är 15 cm. Solen skiner i en 45 graders vinkel i förhållande till bordsytan. Hur långt sträcker sig skuggan bakom bollen mätt från kontaktpunkten mellan boll och bord? (6 p.)

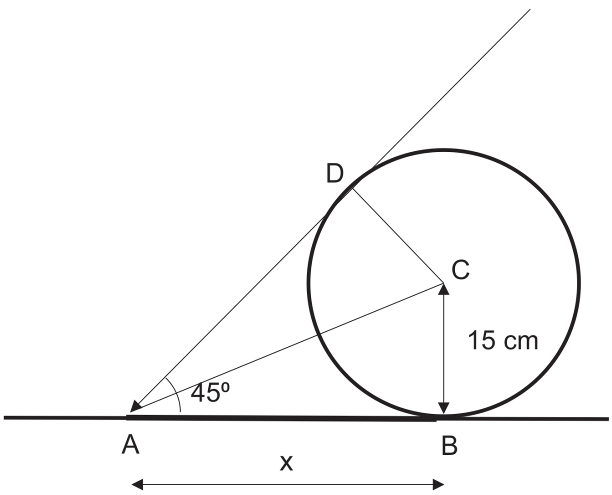


Modellsvar: I figuren nedanför är trianglarna *ABC* och *ADC* kongruenta, eftersom de har en gemensam hypotenusa och en kortare katet som är samma som cirkelns radie. Därför halverar vinkeln *BAC* 45° vinkeln *BAD* och är till sitt belopp $22{,}5^\circ$. Man får därmed följande ekvation för skuggans längd x

$$\tan 22{,}5^\circ = \frac{15}{x},$$

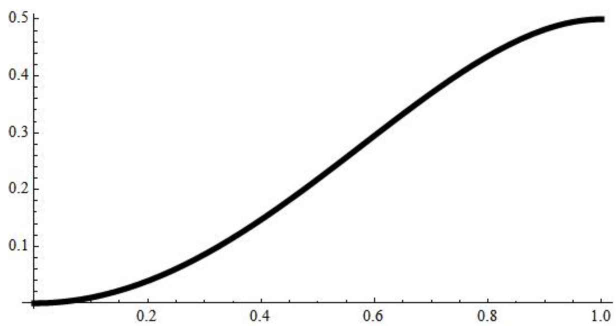
och vidare

$$x = \frac{15}{\tan 22{,}5^\circ} = 36{,}2132\ldots.$$



Uppgift 4. Genomskärningen av en sluttningen inom intervallet $0 \le x \le 1$ följer formen för kurvan $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$ (figur). Finns det inom intervallet $0 \le x \le 1$ någonstans ett ställe där riktningskoefficienten för kurvan är större än $\frac{1}{\sqrt{3}}$? (6 p.)

Anmärkning: Eftersom $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, kunde man lika gärna formula frågan som: Finns det inom intervallet $0 \le x \le 1$ något ställe där lutningsvinkeln är större än 30°?



Modellsvar: Lutningsvinkelns tangent fås ur värdet på derivatan $g(x) = f'(x) = 2x - 2x^3$ i samtliga punkter $0 \leq x \leq 1$. Maximvärdet för lutningsvinkeln fås å sin sida från nollställena till derivatan av funktionen $g(x)$, eller ändpunkterna till intervallet $[0, 1]$. Eftersom $g(0) = g(1) = 0$ beräknar vi

$$g'(x) = 2 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Därmed hittas maximivärdet för funktionen g inom intervallet $[0, 1]$ i punkten $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. I denna punkt är

$$g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Anmärkning: Lutningsvinkeln i denna punkt är

$$\tan^{-1}(\frac{4}{3\sqrt{3}}) \approx 37{,}58^\circ > 30^\circ.$$