Matematik | Uppgift 1.

Ge exakt svar i alla deluppgifter. Här behöver du inte motivera dina svar.

a) Ange alla reella lösningar till likheten $x^2 - 10x + 9 = 0$. (1 p.)

b) Ange alla reella lösningar till likheten $\frac{x}{2} - \frac{4}{7} = 3$. (1 p.)

c) Ange derivata till funktionen $f(x) = 7x^2 + 3x$. (1 p.)

d) Ange alla reella lösningar till olikheten $\frac{x}{2} : \frac{4}{7} > 3$. (1 p.)

e) En lösning till likheten $\sin(x) = a$ är $x = \frac{\pi}{3}$. Ange alla reella lösningar till likheten. (1 p.)

f) Ange alla reella lösningar till likheten $|x + 1| = x$. (1 p.)

Lösning:

a) Svar: Likheten $x^2 - 10x + 9 = 0$ uppfylls om och endast om $x = 1$ eller $x = 9$.

b) Svar: Likheten $\frac{x}{2} - \frac{4}{7} = 3$ uppfylls om och endast om $x = 7\frac{1}{7}$.

c) Svar: Derivatan till funktionen $f(x) = 7x^2 + 3x$ är $f'(x) = 14x + 3$.

d) Svar: Olikheten $\frac{x}{2} : \frac{4}{7} > 3$ uppfylls om och endast om $x > 3\frac{3}{7}$.

e) Svar: Likheten $\sin(x) = a$ uppfylls om och endast om $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ eller $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

f) Svar: Inga reella tal x uppfyller likheten $|x + 1| = x$.

Matematik | Uppgift 2.

Ingenjör Miettinen klipper en rektangulär gräsmatta som är 15 m lång och 10 m bred. Gräsklipparen är 0, 5 m bred. Miettinen börjar klippa från den yttre kanten på gräsmattan och klipper exakt klipparens bredd från varje sida av gräsmattan.

a) Hur mycket av den totala gräsmattan har ingenjören klippt efter det första hela varvet? Ge svaret i procent. Motivera ditt svar.

(3 p.)

b) Ingenjören fortsätter klippa på samma sätt från den yttre kanten av den oklippta delen av gräsmattan. Hur många kompletta hela varv måste ingenjören klippa för att ha klippt åtminstone halva ytan? Motivera ditt svar.

(3 p.)

Lösning:

a) Arean av hela gräsmattan är $15 \cdot 10 \text{ m}^2 = 150 \text{ m}^2$. Efter det första varvet har ingenjören klippt $0,5$ m från varje sidan. Alltså ingenjören har klippt totalt 1 m på bredden och 1 m i längdriktningen. Arean av den oklippta delen av gräsmattan är $(15-1)\cdot(10-1) \text{ m}^2 = 126 \text{ m}^2$ och förhållandet mellan arean av den klippta delen av gräsmattan och arean av hela gräsmattan är

$$\frac{150 \text{ m}^2 - 126 \text{ m}^2}{150 \text{ m}^2} = 0,16 = 16\%.$$

Svar: Efter det första hela varvet har ingenjören klippt 16% av den totala gräsmattan.

b) Med varje varv klipper man både längd och bredd med 1 m. Efter n varv, är längden av den oklippta delen av gräsmattan $(15-n)$ m och bredden av den oklippta delen av gräsmattan $(10-n)$ m. Därför är formeln för arean av den klippta delen av gräsmattan

$$A(n) = 150 \text{ m}^2 - (15-n)(10-n) \text{ m}^2 = 150 \text{ m}^2 - 150 \text{ m}^2 + (25n - n^2) \text{ m}^2 = (25n - n^2) \text{ m}^2.$$

Låt $P(n)$ vara förhållandet mellan arean av den klippta delen av gräsmattan och arean av hela gräsmattan efter n varv. Alltså $P(n) = \frac{A(n)}{150 \text{ m}^2}$. Vi löser olikheten

$$\frac{25n - n^2}{150} \geq \frac{1}{2}.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}
&\frac{25n - n^2}{150} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 25n + n^2 = 75 \Leftrightarrow n^2 + 25n - 75 = 0\\
\Leftrightarrow \quad & n = \frac{-25 + \sqrt{-25 - 4\cdot(-1)\cdot(-75)}}{-2} \text{ eller } n = \frac{-25 - \sqrt{-25 - 4\cdot(-1)\cdot(-75)}}{-2}\\
\Leftrightarrow \quad & n = \frac{25 - \sqrt{325}}{2} \text{ eller } n = \frac{25 + \sqrt{325}}{2}
\end{aligned}$$

och eftersom $25n - n^2$ är en parabola som öppnas nedåt,

$$\frac{25n - n^2}{150} \geq \frac{1}{2}$$

om och endast om

$$\frac{25 - \sqrt{325}}{2} \leq n \leq \frac{25 + \sqrt{325}}{2}.$$

Eftersom $\frac{25-\sqrt{325}}{2} \approx 3,486$ (ja $\frac{25+\sqrt{325}}{2} \approx 21,514$), måste ingenjören klippa åtminstone fyra hela varv för att ha klippt halva ytan.

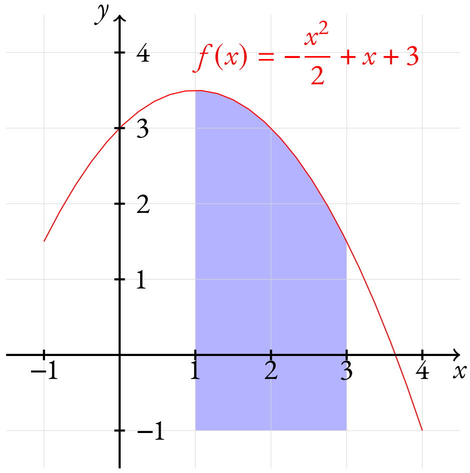
Svar: Ingenjören måste klippa åtminstone fyra hela varv för att ha klippt halva ytan.

Matematik | Uppgift 3.

Ge exakt svar i alla deluppgifter. Motivera dina svar.

a) Beräkna arean av området mellan grafen till funktionen $f(x) = e^x$, dess tangentlinjen då $x = 0$, och linjerna $x = -2$ och $x = 2$. (2 p.)

b) Beräkna arean av området som är markerat med blått i figuren nedan. (2 p.)



c) En kropp begränsas av planen $z = x + 2$ och $z = -2x - 1$, planen $x = -1$ och $x = 2$ och planen $y = 0$ och $y = 4$. Beräkna kroppens volym. (2 p.)

Lösning:

a) Vi hittar först ekvationen för tangentlinjen. Eftersom $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$ och dessutom $f'(0) = e^0 = 1$, får vi tangentlinjen från ekvationen $y - 1 = 1(x - 0)$. Därför är ekvationen för tangentlinjen $y = x + 1$. Eftersom grafen till funktionen f ligger över tangentlinjen i intervallet $[-2, 2]$, är den efterfrågade arean

$$\int_{-2}^{2} e^x - x - 1\,\mathrm{d}x = \Big|_{-2}^{2} e^x - \frac{x^2}{2} - x = e^2 - \frac{2^2}{2} - 2 - (e^{-2} - \frac{(-2)^2}{2} - (-2)) = e^2 - e^{-2} - 4.$$

Svar: Den efterfrågade arean är $e^2 - e^{-2} - 4$.

b) Vi får den efterfrågade arean genom att beräkna

$$\int_{1}^{3} \left(-\frac{x^2}{2} + x + 3\right) - (-1)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} -\frac{x^2}{2} + x + 4\,\mathrm{d}x = \Big|_{1}^{3} -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x = -\frac{3^3}{6} + \frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 - (-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 4)$$
$$= -\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + 12 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - 4 = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

Svar: Den efterfrågade arean är $7\frac{2}{3}$.

c) Vi börjar med att beräkna kroppens tvärsnittsarea i xz-planet. Eftersom $((x + 2) - (-2x - 1)) = (3x + 3) \geq 0$, för $x \in [-1, 2]$, får vi

$$A = \int_{-1}^{2} |(x + 2) - (-2x - 1)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x + 2) - (-2x - 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{2} 3x + 3\,\mathrm{d}x = \Big|_{-1}^{2} \frac{3}{2}x^2 + 3x$$
$$= \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - (\frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)) = \frac{3}{2} \cdot 4 + 6 - \frac{3}{2} + 3 = \frac{27}{2}.$$

Kroppens tvärsnittsarea är konstant i y-riktning. Därför är kroppens volym

$$V = A\Delta y = \frac{27}{2}(4 - 0) = 54.$$

Svar: Den efterfrågade volymen är 54.