Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2018

Arkkitehtimatematiikan koe, 21.5.2018, Ratkaisut (Sarja A)

1. Anna kohdissa a), b) ja c) vastaukset tarkkoina arvoina.

   a) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $x^2 = 7$?
   (1 p.)

   b) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $\frac{5}{4} \cdot \frac{x}{3} = 2$?
   (1 p.)

   c) Mikä on lukujen $2, 5, 0, -4$ ja 1 keskiarvo?
   (1 p.)

   d) Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta nousee 14 %. Kuinka paljon värikynärasia maksaa hinnannousun jälkeen?
   (1 p.)

   e) Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta laskee 14 %. Kuinka paljon värikynärasia maksaa hinnanlaskun jälkeen?
   (1 p.)

   f) Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta ensin laskee 14 % ja tämän jälkeen se nousee 14 %. Kuinka paljon värikynärasia maksaa hinnanmuutosten jälkeen?
   (1 p.)

Ratkaisu:

a) Yhtälö $x^2 = 7$ toteutuu jos ja vain jos x on $\sqrt{7}$ tai x on $-\sqrt{7}$.

Vastaus: Reaaliluvut $\sqrt{7}$ ja $-\sqrt{7}$.

Sarja B: $x^2 = 5$, Vastaus: $\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$.

Sarja C: $x^2 = 3$, Vastaus: $\sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$.

Sarja D: $x^2 = 2$, Vastaus: $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$.

b) Huomataan, että

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{x}{3} = 2 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot x}{4 \cdot 3} = 2 \Leftrightarrow \frac{5 \cdot x}{12} = 2$$
$$\Leftrightarrow 5 \cdot x = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow 5 \cdot x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5}.$$

Näin ollen ainoa reaaliluku x, joka toteuttaa yhtälön $\frac{5}{4} \cdot \frac{x}{3} = 2$, on $x = \frac{24}{5}$.

Vastaus: Reaaliluku $x = \frac{24}{5}$.

Sarja B: $\frac{x}{4} \cdot \frac{5}{3} = 2$, Vastaus: $x = \frac{24}{5}$.

Sarja C: $\frac{x}{3} \cdot \frac{7}{5} = 2$, Vastaus: $x = \frac{30}{7}$.

Sarja D: $\frac{x}{5} \cdot \frac{7}{3} = 2$, Vastaus: $x = \frac{30}{7}$.

c) Lukujen $2, 5, 0, -4$ ja 1 keskiarvo on

$$\frac{2+5+0+(-4)+1}{5} = \frac{2+5-4+1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Vastaus: Lukujen $2, 5, 0, -4$ ja 1 keskiarvo on $\frac{4}{5}$.

Sarja B: Luvut $2, 7, 0, -4$ ja 1, Vastaus: $\frac{6}{5}$.

Sarja C: Luvut $3, 5, 0, -7$ ja 1, Vastaus: $\frac{2}{5}$.

Sarja D: Luvut $3, 7, 0, -4$ ja 1, Vastaus: $\frac{7}{5}$.

d) Koska

$$19,90 \text{ e } + 0,14 \cdot 19,90 \text{ e } = 22,686 \text{ e } \approx 22,69 \text{ e},$$

värikynärasia maksaa hinnan nousun jälkeen $22,69$ euroa.

Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan nousun jälkeen $22,69$ euroa.

Sarja B: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta nousee 12 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan nousun jälkeen $22,29$ euroa.

Sarja C: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta nousee 18 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan nousun jälkeen $23,48$ euroa.

Sarja D: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta nousee 16 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan nousun jälkeen $23,08$ euroa.

e) Koska

$$19,90 \text{ e } - 0,14 \cdot 19,90 \text{ e } = 17,114 \text{ e } \approx 17,11 \text{ e},$$

värikynärasia maksaa hinnan laskun jälkeen $17,11$ euroa.

Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan laskun jälkeen $17,11$ euroa.

Sarja B: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta laskee 12 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan laskun jälkeen $17,51$ euroa.

Sarja C: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta laskee 18 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan laskun jälkeen $16,32$ euroa.

Sarja D: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta laskee 16 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan laskun jälkeen $16,72$ euroa.

f) Koska

$$19,90 \text{ e } - 0,14 \cdot 19,90 \text{ e } = 17,114 \text{ e}$$

ja

$$17,114 \text{ e } + 0,14 \cdot 17,114 \text{ e } = 19,50996 \text{ e } \approx 19,51 \text{ e},$$

värikynärasia maksaa hinnan muutosten jälkeen $19,51$ euroa.

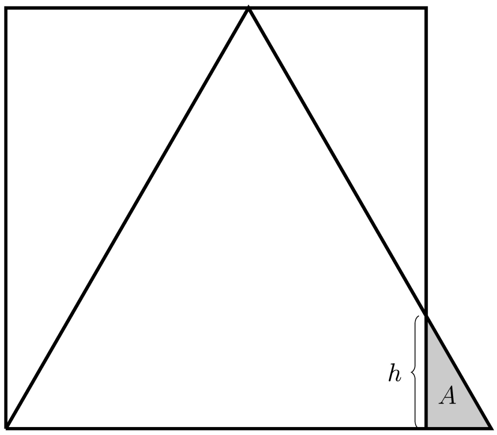
Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan muutosten jälkeen $19,51$ euroa.

Sarja B: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta ensin laskee 12 % ja tämän jälkeen se nousee 12 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan muutosten jälkeen $19,61$ euroa.

Sarja C: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta ensin laskee 18 % ja tämän jälkeen se nousee 18 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan muutosten jälkeen $19,26$ euroa.

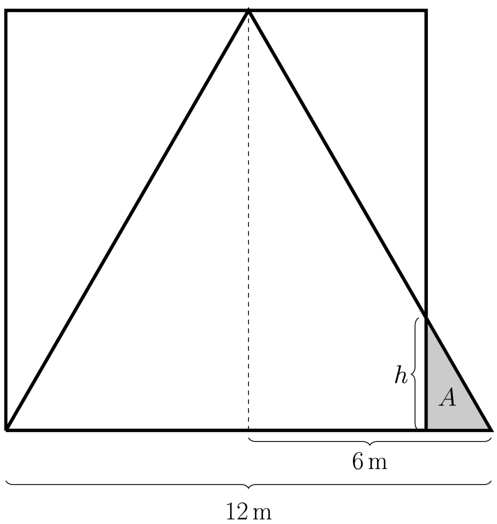
Sarja D: Värikynärasia maksaa joulukuussa $19,90$ euroa. Tammikuussa hinta ensin laskee 16 % ja tämän jälkeen se nousee 16 %. Vastaus: Värikynärasia maksaa hinnan muutosten jälkeen $19,39$ euroa.

2. Arkkitehtiopiskelija Pekkala kattaa neliön mallisen pihaterassinsa tasasivuisen kolmion mallisella lasikatoksella. Katso alla oleva kuva. Katos ja terassi ovat molemmat vaakasuorassa ja vain osittain päällekäin kuten kuvassa. Laske terassin ulkopuolelle jäävän (kuvassa väritetyn) kolmion korkeus (h) ja pinta-ala (A), kun lasikatoksen sivun pituus on 12 metriä. Anna vastausten tarkat arvot ja kaksidesimaaliset likiarvot. (6 p.)



Ratkaisu:

Olkoon kuvan harmaan pikkukolmion korkeus h ja pinta-ala A.



Pythagoraan lauseen nojalla kuvan tasasivuisen kolmion korkeus

$$k = \sqrt{(12\text{ m})^2 - (6\text{ m})^2} = \sqrt{108}\text{ m} = \sqrt{3} \cdot 6\text{ m}.$$

Kuvan tasasivuisen kolmion korkeus on sama kuin kuvan neliön sivun pituus. Näin ollen harmaalla väritetyn pikkukolmion kannan pituus on

$$12\text{ m } - \sqrt{3}\cdot 6\text{ m}.$$

Koska kuvan tasasivuisen kolmion puolikas ja harmaalla väritetty pikkukolmio ovat yhdenmuotoiset, niin

$$\frac{h}{12\text{ m } - \sqrt{108}\text{ m}} = \frac{6\sqrt{3}\text{ m}}{6\text{ m}} = \sqrt{3},$$

josta edelleen

$$h = \sqrt{3}\cdot(12\text{ m } - 6\sqrt{3}\text{ m }) = (\sqrt{3}\cdot 12 - 18)\text{ m } \approx 2,7846\text{ m}.$$

Pikkukolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}\cdot 12\text{ m } - 18\text{ m})\cdot(12\text{ m } - \sqrt{3}\cdot 6\text{ m})\\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(12\text{ m } - \sqrt{3}\cdot 6\text{ m})\cdot(12\text{ m } - \sqrt{3}\cdot 6\text{ m})\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(12-\sqrt{3}\cdot 6)^2\text{ m}^2\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(12^2 - 2\cdot 12\cdot\sqrt{3}\cdot 6 + (\sqrt{3}\cdot 6)^2)\text{ m}^2\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(12^2 - 12^2\cdot\sqrt{3} + 12^2\cdot\frac{3}{4})\text{ m}^2\\
&= (\sqrt{3}\cdot 126 - 216)\text{ m}^2 \approx 2,2384\text{ m}^2.
\end{aligned}$$

Vastaus: Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion korkeus $h = (\sqrt{3}\cdot 12 - 18)$ m. Korkeuden h kaksidesimaalinen likiarvo on $2,78$ m. Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion pinta-ala $A = (\sqrt{3}\cdot 126 - 216)\text{ m}^2$. Pinta-alan A kaksidesimaalinen likiarvo on $2,24\text{ m}^2$.

Sarja B: Lasikatoksen sivun pituus on 18 metriä. Vastaus: Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion korkeus $h = (\sqrt{3}\cdot 18 - 27)$ m. Korkeuden h kaksidesimaalinen likiarvo on $4,18$ m. Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion pinta-ala $A = (\frac{\sqrt{3}\cdot 567}{2} - 486)\text{ m}^2$. Pinta-alan A kaksidesimaalinen likiarvo on $5,04\text{ m}^2$.

Sarja C: Lasikatoksen sivun pituus on 16 metriä. Vastaus: Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion korkeus $h = (\sqrt{3}\cdot 16 - 24)$ m. Korkeuden h kaksidesimaalinen likiarvo on $3,71$ m. Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion pinta-ala $A = (\sqrt{3}\cdot 224 - 384)\text{ m}^2$. Pinta-alan A kaksidesimaalinen likiarvo on $3,98\text{ m}^2$.

Sarja D: Lasikatoksen sivun pituus on 14 metriä. Vastaus: Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion korkeus $h = (\sqrt{3}\cdot 14 - 21)$ m. Korkeuden h kaksidesimaalinen likiarvo on $3,25$ m. Terassin ulkopuolelle jäävän kolmion pinta-ala $A = (\frac{\sqrt{3}\cdot 343}{2} - 294)\text{ m}^2$. Pinta-alan A kaksidesimaalinen likiarvo on $3,05\text{ m}^2$.

3.

a) Mitkä reaaliluvut x toteuttavat yhtälön $4x^2 + 2x - 1 = 0$? Anna vastauksen tarkat arvot ja kaksidesimaaliset likiarvot. (3 p.)

b) Tarkastellaan kulmaa α. Tiedetään, että

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ja että

$$\sin\alpha \leq \sqrt{3}\cos\alpha.$$

Kuinka suuri kulma α voi enimmillään olla? Anna vastauksen tarkka arvo. (3 p.)

Ratkaisu:

a) Paraabelin

$$y = 4x^2 + 2x - 1$$

nollakohdat ovat

$$\frac{-2+\sqrt{2^2-4\cdot 4\cdot(-1)}}{2\cdot 4} = \frac{-2+\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2+\sqrt{20}}{8}$$
$$= \frac{-2+\sqrt{2^2\cdot 5}}{8} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0,3090$$

ja

$$\frac{-2-\sqrt{2^2-4\cdot 4\cdot(-1)}}{2\cdot 4} = \frac{-2-\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2-\sqrt{20}}{8}$$
$$= \frac{-2-\sqrt{2^2\cdot 5}}{8} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \approx -0,8090.$$

Vastaus: Yhtälö $4x^2 + 2x - 12x^2 - 3x - 3 = 0$ toteutuu jos ja vain jos $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0,31$ tai $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \approx -0,81$.

Sarja B: $4x^2 + 5x - 1 = 0$. Vastaus: Yhtälö $4x^2 + 5x - 1 = 0$ toteutuu jos ja vain jos $x = \frac{-5+\sqrt{41}}{8} \approx 0,18$ tai $x = \frac{-5-\sqrt{41}}{8} \approx -1,43$.

Sarja C: $4x^2 + 7x - 1 = 0$. Vastaus: Yhtälö $4x^2 + 7x - 1 = 0$ toteutuu jos ja vain jos $x = \frac{-7+\sqrt{65}}{8} \approx 0,13$ tai $x = \frac{-7-\sqrt{65}}{8} \approx -1,88$.

Sarja D: $4x^2 + 6x - 1 = 0$. Vastaus: Yhtälö $4x^2 + 6x - 1 = 0$ toteutuu jos ja vain jos $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{4} \approx 0,15$ tai $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{4} \approx -1,65$.

b) Ehdon $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nojalla sekä $\sin\alpha > 0$ ja että $\cos\alpha > 0$, joten

$$\sin\alpha \leq \sqrt{3}\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \leq \sqrt{3}.$$

Toisaalta

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

on välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ aidosti kasvava funktio, joten maksimi kulma on se ja vain se kulma $\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, jolle pätee

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \sqrt{3}.$$

Koska

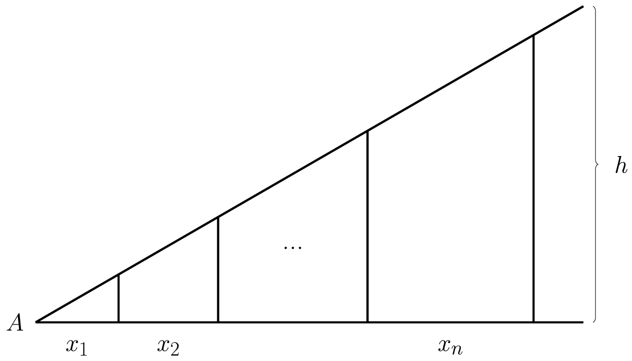
$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

niin α voi olla enimmillään $\frac{\pi}{3}$.

Vastaus: Kulma α voi olla enimmillään $\frac{\pi}{3}$.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

4. Tarkastellaan suorakulmaisen kolmion muotoista rakennelmaa, jonka korkeus on h. Katso kuva. Rakennelman kahden peräkkäisen tukipalkin välinen etäisyys x_{k+1} on aina 20 % suurempi kuin kahden edellisen tukipalkin välinen etäisyys x_k, $k = 1, 2, \ldots$. Kärkeä A vastaava kulma on $\frac{\pi}{6}$ ja $x_1 = 1$ m.



a) Kuinka monta tukipalkkia rakennelmassa on, kun $h = 3$ m? (4 p.)

b) Mikä on tukipalkkien kokonaispituus, kun $h = 3$ m? Anna vastauksen kaksidesimaalinen likiarvo. (2 p.)

Ratkaisu:

a) Koska

$$x_{i+1} = 1,2 \cdot x_i,$$

niin etäisyydet muodostava geometrisen jonon ja

$$x_{i+1} = x_1 \cdot 1,2^i = 1,2^i \text{ m}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Nyt k:tta, $k \geq 1$, tukipalkkia vastaavan kolmion kannan pituus on geometrinen summa

$$\sum_{i=0}^{k-1} 1,2^i \text{ m} \;= \frac{1,2^k - 1}{1,2 - 1} \text{ m} \;= 5(1,2^k - 1) \text{ m}.$$

Koska kärkeä A vastaava kulma on $\frac{\pi}{6}$, niin tukipalkin k pituus on

$$\tan\frac{\pi}{6} \cdot 5(1,2^k - 1) \text{ m} \;= \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} \cdot 5(1,2^k - 1) \text{ m}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 5(1,2^k - 1) \text{ m} \;= \frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^k - 1) \text{ m}.$$

Ensimmäisen tukipalkin pituus

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2 - 1) \text{ m} \;\approx 0,57735 \text{ m}.$$

Toisen tukipalkin pituus

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^2-1)\text{ m } \approx 1,27017\text{ m.}$$

Kolmannen tukipalkin pituus

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^3-1)\text{ m } \approx 2,10156\text{ m.}$$

Neljännen tukipalkin pituus

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^4-1)\text{ m } \approx 3,09922\text{ m.}$$

Neljännen tukipalkin pituus olisi yli 3 metriä, joten rakennelmassa on kolme tukipalkkia.

Vastaus: Rakennelma sisältää kolme tukipalkkia.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

b) Tukipalkkien yhteispituus on

$$\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2-1)\text{ m } + \frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^2-1)\text{ m } + \frac{5}{\sqrt{3}}(1,2^3-1)\text{ m}$$

$$\approx 0,57735\text{ m } + 1,27017\text{ m } + 2,10156\text{ m } = 3,94908\text{ m.}$$

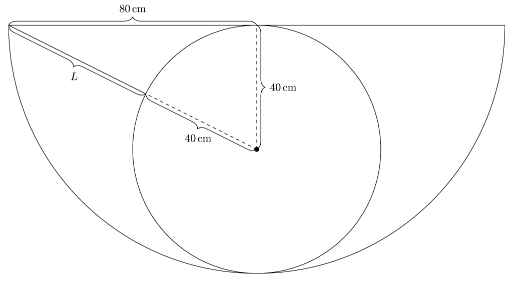
Vastaus: Tukipalkkien yhteispituus on $3,95$ m.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

5. Puolipallon muotoisen kulhon pohjalle asetetaan pallo. Kulhon säde on 80 cm ja pallon säde on 40 cm. Pallo tuetaan kolmella kulhon yläreunaan kiinnitetyllä samanpituisella tukitangolla niin, että pallo ei pääse liikkumaan eikä se putoa, vaikka kulho olisi ylösalaisin. Tukitangot ovat tasavälein, osoittavat kohtisuoraan kulhon pohjalla olevan pallon keskipisteeseen ja tankojen päät koskettavat pallon pintaa kohtisuorasti. Määritä tukitangon pituus. Anna vastauksen kaksidesimaalinen likiarvo. Huom: Tehtävässä ei huomioida tukitangon paksuutta eikä massaa. (6 p.)

Ratkaisu:

Olkoon tukivarren pituus L.



Muodostetaan suorakulmainen kolmio, jonka kateetteja ovat kulhon säde $R = 80$ cm, pallon säde $r = 40$ cm ja jonka hypotenuusana $L + r$, missä L on tukitangon pituus. Pythagoraan lauseen nojalla

$$L + r = \sqrt{R^2 + r^2} = \sqrt{(80 \text{ cm})^2 + (40 \text{ cm})^2} = 40 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}$$

ja edelleen

$$L = 40 \cdot \sqrt{5} \text{ cm} - 40 \text{ cm} \approx 49{,}44 \text{ cm}.$$

Vastaus: Tukitangon pituus on $49{,}44$ cm.

Sarja B: Kulhon säde on 60 cm ja pallon säde on 30 cm. Vastaus: Tukitangon pituus on $37{,}08$ cm.

Sarja C: Kulhon säde on 100 cm ja pallon säde on 50 cm. Vastaus: Tukitangon pituus on $61{,}80$ cm.

Sarja D: Kulhon säde on 20 cm ja pallon säde on 10 cm. Vastaus: Tukitangon pituus on $12{,}36$ cm.

6. Konserttisalin kahvioon suunnitellaan taideteosta, joka muodostuu värikkäistä kuutioista. Kuutioiden tahkot väritetään niin, että kunkin tahkon värittämiseen käytetään vain yhtä väriä ja vierekkäiset tahkot ovat erivärisiset. Kaksi kuution tahkoa tulkitaan vierekkäisiksi, jos niillä on yhteinen särmä.

   a) Kuinka monta erilaista kuutiota saadaan, jos käytetään tasan kolmea eri väriä? (2 p.)

   b) Kuinka monta erilaista kuutiota saadaan, jos käytetään tasan neljää eri väriä? (2 p.)

   c) Kuinka monta erilaista kuutiota saadaan, jos käytetään tasan viittä eri väriä? (2 p.)

Ratkaisu:

a) Värejä on käytössä tasan kolme. Jos kaksi vastakkaista tahkoa ovat eriväriset, niin jotkin kaksi vierekkäistä tahkoa ovat samanväriset. Näin ollen vastakkaisten tahkojen on oltava samanväriset. Koska värejä on käytössä tasan kolme, niin mahdollisia kuutioita on vain yksi kappale.

Vastaus: Yksi kuutio.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

b) Värejä on käytössä tasan neljä. Koska tahkoja on kuusi kappaletta ja vierekkäiset tahkot ovat erivärisiä, niin on täsmälleen kaksi vastakkaisten tahkojen paria, joissa parin jäsenet ovat samanväriset. Näihin voidaan valita väri

$$\binom{4}{2} = 6$$

tavalla. Jäljelle jääneet kaksi tahkoa ovat vastakkaiset ja ne on väritettävä jäljelle jääneillä kahdella värillä. Näiden värien järjestyksellä ei ole väliä, sillä kuutiota voidaan kääntää.

Vastaus: Kuusi kuutiota.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.

c) Värejä on käytössä tasan viisi. Nyt jotkin kaksi vastakkaista tahkoa ovat samanväriset ja näiden väriksi voidaan valita yksi viidestä mahdollisesta väristä. Loput neljä väriä on käytettävä jäljellä oleviin neljään tahkoon. Kiinnitetään yhden jäljellä olevan tahkon väri. Tällöin vastapuolella olevan tahkon väri voidaan valita kolmella eri tavalla. Kaksi jäljelle jäänyttä tahkoa väritetään jäljellä olevilla kahdella värillä. Näiden värien järjestyksellä ei ole väliä, sillä kuutiota voidaan kääntää. Näin ollen mahdollisia vaihtoehtoja on $5 \cdot 3 = 15$.

Vastaus: 15 kuutiota.

Sarjat B, C ja D: Sama kuin sarja A.